

SÉRIE A, N° 1340

N° D'ORDRE :

2209

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Jean BAURAND

Ancien élève de l'École Normale Supérieure.

Professeur au lycée Saint-Louis

1^{re} THÈSE. — ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DES MOUVEMENTS DE L'EAU
DANS UN TUBE ET DES ONDES CIRCULAIRES
PRODUITES A LA SURFACE DE L'EAU.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le *3¹ juin* **Mai 1932** devant la Commission d'examen

MM. H. ABRAHAM. *Président.*

H. BÉNARD ... } *Examineurs.*
R. LESPIEAU.. }

PARIS

MASSON ET C^{ie}, ÉDITEURS

LIBRAIRES DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE

120, BOULEVARD SAINT-GERMAIN

1932



Digitized by the Internet Archive
in 2026

SÉRIE A, N° 1340

N° D'ORDRE :

2209

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Jean BAURAND

Ancien élève de l'École Normale Supérieure.
Professeur au lycée Saint-Louis

1^{re} THÈSE. — ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DES MOUVEMENTS DE L'EAU
DANS UN TUBE ET DES ONDES CIRCULAIRES
PRODUITES A LA SURFACE DE L'EAU.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le **Mai 1932** devant la Commission d'examen

MM. H. ABRAHAM. *Président.*

H. BÉNARD... }
R. LESPIEAU.. } *Examineurs.*

PARIS

MASSON ET C^{ie}, ÉDITEURS

LIBRAIRES DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE

120, BOULEVARD SAINT-GERMAIN

1932

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen..... G. MAURAIN, *Professeur*, Physique du globe.

Doyen honoraire.... M. MOLLIARD.

Profess. honoraires. { H. LE CHATELIER. E. HEROUARD.
H. LEBESGUE. EMILE PICARD.
A. FERNBACH. RÉMY PERRIER.
A. LEDUC.

<i>Professeurs</i>	E. GOURSAT..... Analyse supérieure et algèbre supér. G. JULIA..... Calcul différentiel et calcul intégral. N..... Mécanique physique et expérimentale. P. JANET..... Electrotechnique générale. F. WALLERANT... Minéralogie. P. PAINLEVÉ..... Mécanique anal. et mécanique céleste. M. CAULLERY..... Zoologie (Evolution des êtres organisés) EMILE BOREL..... Calcul des probabilités et phys. mathém. H. ABRAHAM..... Physique. M. MOLLIARD..... Physiologie végétale. E. CARTAN..... Géométrie supérieure. GABRIEL BERTRAND Chimie biologique. JEAN PERRIN..... Chimie physique. L. LAPICQUE..... Physiologie générale. M^{me} P. CURIE..... Physique générale et radioactivité. G. URBAIN..... Chimie générale. L. MARCHIS..... Aviation. E. VESSIOT..... Théorie des fonctions et théorie des transformations. A. COTTON..... Physique générale. J. DRACH..... Application de l'analyse à la géométrie. CHARLES FABRY... Physique. R. LESPIEAU..... Théories chimiques. P. PORTIER..... Physiologie comparée. CHARLES PÉREZ... Zoologie. E. BLAISE..... Chimie organique. P.-A. DANGEARD.. Botanique. LÉON BERTRAND.. Géolog. structurale et géolog. appliquée. E. RABAUD..... Biologie expérimentale. PAUL MONTEL..... Mécanique rationnelle. V. AUGER..... Chimie appliquée. P. WINTREBERT.. Anatomie et histologie comparées. G. DUBOSCO..... Biologie maritime. EUGÈNE BLOCH... Physique théorique et phys. céleste. A. MAILHE..... Etude des combustibles. L. LUTAUD..... Géogr. physique et géol. dynamique. HENRI VILLAT... Mécanique des fluides et applications. CH. JACOB..... Géologie. P. PASCAL..... Chimie minérale. LÉON BRILLOUIN.. Théories physiques. E. ESCLANGON... Astronomie. H. BENARD..... Mécanique expérimentale des fluides. C. MAUGUIN..... Minéralogie. L. BLARINGHEM.. Botanique. A. GUILLIERMOND. Botanique (P. C. N.). A. DENJOY..... Mathématiques générales. A. DUFOUR..... Physique (P. C. N.).
---------------------------------	--



E. PÉCHARD.... Chimie (Ens. P. C. N.) A. GUILLET..... Physique. M. GUICHARD... Chimie minérale. A. MICHEL-LEVY Pétrographie. A. DEREIMS.... Géologie. H. MOUTON.... Chimie physique. L. DUNOYER... Optique appliquée. M. JAVILLIER.. Chimie biologique. ROBERT-LEVY... Zoologie. A. DEBIERNE... Radioactivité. E. DARMOIS.... Physique. G. BRUHAT..... Physique. F. PICARD..... Zool. (Év. êtres org.) L. JOLEAUD.... Paléontologie. M. FRECHET... Calcul des probabilités et phys. math.	M^{me} RAMART-LUCAS Chimie organique. BEGHIN..... Méc. théor. des fluides. FOCH..... Méc. expér. des fluides. PAUTHENIER... Physique (P. C. N.). VILLEY..... Méc. phys. et expér. De BROGLIE... Théories physiques. LABROUSTE.... Physique du Globe. FREUNDLER... Chimie (P. C. N.). PRENANT..... Zoologie. P. JOB..... Chimie générale. CHRETIEN..... Optique appliquée. G. BOHN..... Zoologie (P. C. N.). BOURGUEL..... Chimie (P. C. N.). R. COMBES.... Sc. Natur. (P. C. N.). GARNIER..... Mécanique Rationnelle.
--	--

Secrétaire..... A. PACAUD

A LA MÉMOIRE DE MON PÈRE

A MA MÈRE

A MA FEMME

A Monsieur H. ABRAHAM

Directeur du Laboratoire de Physique
de l'École Normale supérieure

Hommage de profonde reconnaissance.

ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DES MOUVEMENTS DE L'EAU DANS UN TUBE ET DES ONDES CIRCULAIRES PRODUITES A LA SURFACE DE L'EAU

Par J. BAURAND.

INTRODUCTION

Les ondes qui se propagent à la surface d'un liquide, dont le type le plus facile à produire est constitué par les « ronds dans l'eau » ont donné lieu à de nombreux travaux tant mathématiques qu'expérimentaux.

L'étude la plus complète est celle des mouvements périodiques ou des ondes stationnaires auxquelles ils donnent naissance :

Rides : théorie mathématique de Lord Kelvin ⁽¹⁾.

Mathiessen ⁽²⁾, Lord Rayleigh ⁽³⁾, Dorsey, Wattson, Grunmach ⁽⁴⁾ ont vérifié les résultats de Kelvin et les ont appliqués à la détermination de la constante capillaire de différents liquides et métaux fondus.

Ondes stationnaires dans des récipients de formes déter-

⁽¹⁾ LORD KELVIN. *Phil. mag.* (IV), 42, 368, 1871.

⁽²⁾ MATHIESSEN. *Ann. der Phys.*, 38, 118, 1889.

⁽³⁾ LORD RAYLEIGH. *Phil. mag.* (V), 30, 386, 1890.

⁽⁴⁾ GRUNMACH. *Ann. der Phys.* (VII), 440, 1902.

minées (Guthrie, Lechat). Rides de Poncelet. Clapotis (Marey). Seiches du Léman (Forel et Chrystal).

Les ondes liquides non périodiques sont beaucoup moins bien connues. Il faut mettre à part l'« onde solitaire » découverte par Scott Russel. Son étude théorique a été faite par Lord Rayleigh et d'autres. Bazin et Darcy l'ont étudiée par l'expérience. Il s'agit d'ailleurs d'une onde rectiligne qui se propage dans un canal.

Poisson et Cauchy ⁽¹⁾, dans deux célèbres mémoires de 1816 et 1820 ont étudié les ondes progressives en eau profonde. La théorie a été faite d'abord pour les ondes rectilignes. Poisson l'a étendue aux ondes circulaires. Le mouvement est irrotationnel, il existe un potentiel des vitesses. Pour donner des solutions explicites au problème, ces deux auteurs considèrent des cas particuliers satisfaisant aux conditions suivantes :

1° La profondeur du fluide est grande. '

2° Les conditions initiales sont :

a) vitesses initiales nulles en tout point ; les ondes sont produites par le déplacement d'une partie de la masse liquide, confiné au voisinage d'un point ; de plus, le déplacement initial doit être petit, la forme de la surface au voisinage de l'origine doit être à très peu près plane ;

b) ou bien les déplacements initiaux sont nuls en tout point de la surface ; on donne un système de vitesses initiales en des points très voisins les uns des autres.

Les conditions imposées semblent assez difficiles à réaliser. Peut-être peut-on se rapprocher de celles de a, plus difficilement de celles de b. Comme essai de vérification de cette théorie, Poisson cite des expériences de Biot qui ne semblent ni bien précises, ni concluantes ; les différences entre les résultats théoriques et expérimentaux varient de 8 à 20 o/o.

(1) POISSON. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, t. I, 1816 ; CAUCHY. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, t. I, 1827.

Si l'on veut conduire le calcul jusqu'au bout, il faut nécessairement se donner des conditions initiales particulièrement simples, qui conduisent à des mouvements superficiels de très faible amplitude, sinon impossibles, du moins très difficiles à étudier.

Il m'a semblé qu'il serait intéressant de faire l'étude expérimentale de certaines ondes à la surface des liquides, en particulier d'ondes circulaires, en cherchant à étudier le phénomène, aussi près que possible de la source.

PREMIÈRE PARTIE

PRODUCTION DES ONDES ET MÉTHODES D'OBSERVATION

CHAPITRE PREMIER

Production des ondes superficielles

Les ondes liquides sont produites et se propagent à la surface de l'eau contenue dans un bassin à bords inclinés. Afin de ne pas avoir à modifier le réglage des systèmes optiques, la surface de l'eau a toujours été ramenée au même niveau. Le diamètre de cette surface est de 1,12 m. Une partie du fond du bassin a été enlevée et remplacée par une bonne glace de miroitier de 8 mm. d'épaisseur, mastiquée par ses bords sur le fond du récipient.

La cuve est supportée, par l'intermédiaire d'amortisseurs en caoutchouc par deux consoles en fer, scellées dans un mur épais. L'appareil était installé initialement dans une cave de la Faculté des Sciences de Toulouse, sans amortisseurs ; la surface de l'eau était parfaitement tranquille. L'appareil ayant été remonté dans une salle du Laboratoire de Physique de l'École Normale, j'ai dû le placer sur des amortisseurs et malgré leur présence, la surface de l'eau est encore agitée quand on ferme la porte de la salle ; on s'en aperçoit en observant l'image d'un objet par réflexion sur la nappe d'eau. Mais ces amortisseurs sont suffisants pour

empêcher tout mouvement du liquide (voir la sensibilité des méthodes d'observation) même lorsque les machines de l'atelier sont en fonctionnement.

Quel que soit l'appareil producteur d'ondes, il est fixé sur un chariot qui peut se déplacer sur une glissière à queue d'aronde horizontale ; les systèmes optiques sont fixes.

Les différents appareils d'enregistrement et de production des ondes sont tous portés par des supports différents fixés au mur ou sur une table ; les manœuvres nécessitées par une expérience ne risquent pas de produire un mouvement quelconque de la surface du liquide, autre que le mouvement à étudier.

Production d'ondes progressives non périodiques. — Le problème de la production d'ondes progressives doit satisfaire à des conditions qui semblent contradictoires :

L'étude d'un train d'ondes ne peut pas se faire en une seule fois ; les systèmes optiques qui servent à l'observation des ondes ne pouvant pas être déplacés facilement, c'est la source que l'on déplace. Il est donc nécessaire d'obtenir des trains d'ondes identiques les uns aux autres. Il faut que les conditions initiales soient bien définies et aussi simples que possible. Enfin il faut que les ondes produites ne soient pas d'amplitude trop petite, ni de longueur d'onde trop grande, afin que l'on puisse les étudier avec assez de précision par les méthodes optiques qui seront indiquées plus loin. Il semble évident d'autre part que, plus l'amplitude des ondes sera petite, plus rapidement le train d'ondes sera organisé au voisinage de la source. On est tenté par de nombreux procédés qui semblent satisfaire à ces conditions :

a) j'ai d'abord utilisé des gouttes d'eau tombant d'un tube capillaire ou formées à la partie inférieure d'un disque percé d'un trou en mince paroi. On peut facilement obtenir des gouttes de masse donnée, entre 50 et 220 mg. Si la

goutte tombe de quelques centimètres seulement, les ondes produites sont d'amplitude beaucoup trop faible. Si on laisse tomber la goutte de 20 cm. ou plus, on obtient des ondes assez hautes pour être étudiées, mais les différents trains obtenus avec des gouttes identiques, ne se ressemblent pas suffisamment ; on peut expliquer le fait par les vibrations de la goutte pendant sa chute, ou par l'état de l'atmosphère au voisinage de la goutte en formation. J'ai entouré le tube d'un deuxième tube plus large pour éviter les courants gazeux, les différents trains d'onde sont restés dissemblables ;

b) un disque de petit diamètre (1 cm. par exemple) touche la surface de l'eau. On le soulève de la hauteur juste suffisante pour que le liquide reste adhérent par capillarité. Quand la surface du liquide est revenue au repos, un léger soulèvement du disque par attraction électromagnétique laisse retomber le liquide. Les conditions initiales semblent assez bien définies ; mais la façon dont le liquide quitte le disque peut ne pas être rigoureusement la même d'une expérience à l'autre ; quoiqu'il en soit, l'expérience montre que les ondes obtenues sont de trop petite amplitude et la similitude des trains d'ondes difficile à réaliser ;

c) un piston glissant dans un cylindre d'axe vertical est immergé dans l'eau. La base supérieure du piston est à quelques millimètres au-dessous de la surface libre du liquide. On dispose de la masse liquide que l'on peut soulever initialement et on peut produire de grosses ondes ; mais le soulèvement du piston ne se fait pas suivant une loi bien définie et invariable ; il est pour ainsi dire impossible d'obtenir des trains d'ondes identiques ;

d) j'ai essayé d'utiliser une méthode analogue à celle qui permet d'obtenir une onde solitaire dans un canal : on immerge dans le liquide un corps de révolution dont la méridienne a une forme déterminée. On peut modifier la vitesse d'immersion en fixant à la tige verticale qui supporte

le corps un disque plongeant dans un liquide visqueux : les ondes sont bien d'amplitude suffisamment grande, mais les trains successifs ne se ressemblent pas, ce qui provient sans doute de ce que l'immersion ne se fait pas toujours exactement de la même façon. D'autre part, la tige verticale supportant le corps à immerger coulisse dans un long tube vertical et la liberté de son mouvement de chute laisse place à des mouvements latéraux du corps immergé : aux grosses ondes se superposent de très nombreuses petites ondes. Dyar ⁽¹⁾ prétend que l'immersion d'un corps dont la méridienne est représentée par la figure 1 donne une onde solitaire circulaire. Malgré de nombreux essais, en modifiant la forme du corps et la vitesse d'immersion, je n'ai jamais pu obtenir cette onde solitaire ;



Fig. 1.

c) après d'autres essais aussi peu concluants, je me suis arrêté au procédé suivant :

Un tube de verre vertical, fermé à la partie supérieure, porte un ajutage latéral mis en communication avec un robinet par un tube de caoutchouc (fig. 2). La partie inférieure du tube est rodée à l'émeri de plus en plus fin. On termine le rodage par frottement sur du papier de verre à grain très fin. Le tube touche la surface de l'eau ou est immergé de quelques millimètres dans le liquide. Par aspiration, on produit une dépression dans le tube et on soulève un volume d'eau connu. L'ouverture du robinet rétablit la

(1) DYAR. *Ann. de Physique* (III), 7, 421, 1843.

communication entre le tube et l'atmosphère : c'est l'écoulement du liquide dans le tube qui produit les ondes.

Les premières expériences ont été faites en utilisant un robinet de verre, à large voie (7 à 8 mm.) ouvert à la main. Par de nombreuses expériences, je me suis assuré que dans les mêmes conditions, les trains d'ondes superficielles sont identiques les uns aux autres, pourvu que l'ouverture du robinet soit rapide. Le tableau I indique les dépla-

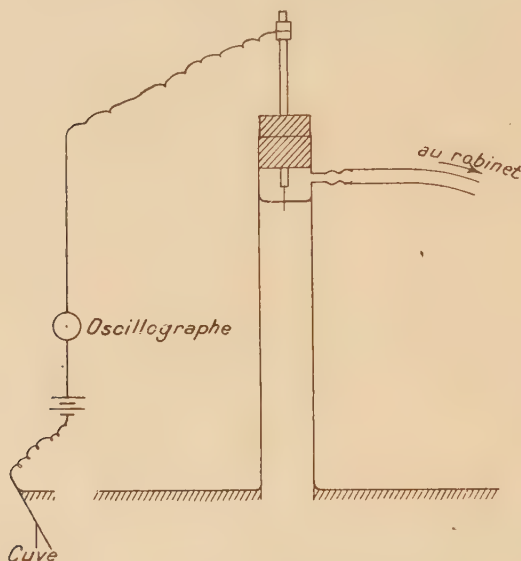


Fig. 2.

cements d'un point de la surface au passage d'une crête et d'un creux aux mêmes instants (temps comptés à partir d'une même origine).

L'erreur maximum est ici de $3/39^e$ donc environ 10 0/0. Dans la plupart des cas, les nombres diffèrent moins. On peut donc être sûr de l'identité des trains successifs à 10 0/0 près et même mieux. Ces résultats sont confirmés par les

mesures des distances creux-crêtes, et des vitesses, à un même instant. Les différences sont encore plus petites que dans la mesure des hauteurs et ne dépassent pas 2 o/o.

Pour être plus sûr de l'identité des trains d'ondes, et surtout dans le but de produire des ondes périodiques par le même procédé, j'ai remplacé le robinet de verre manipulé à la main, par un robinet automatique (fig. 3).

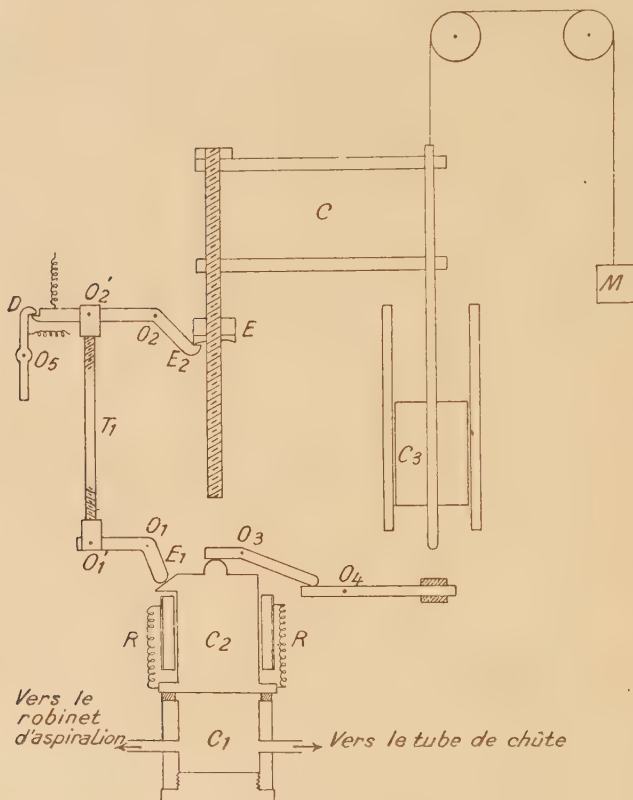
TABLEAU I

Crête		Creux	
1 ^{er} train	2 ^e train	1 ^{er} train	2 ^e train
6	6	16	15
10	10	30	31
15	15	42	42
21	21	51	51
29	29	56	59
39	40	60	59
53	55	58	57
65	65	51	51
71	69	38	41
68	66	25	26
58	58	10	10
44	42		
22	22		
2	2		

Le cylindre C_2 glissant dans un cylindre creux, ferme le robinet en appuyant sur une collerette de caoutchouc portée par le cylindre creux C_1 . A l'intérieur de cette collerette, on peut placer des diaphragmes percés de trous qui permettent de modifier la voie du robinet. La pression est exercée par le bras E_1 qui s'appuie sur un coin. On obtient une pression suffisante pour que le robinet ne fuie pas en tournant la tige T_1 filetée en sens inverse à ses deux extrémités. Quand le déclencheur D est poussé vers la gauche, les ressorts R soulèvent C_2 : le tube de chute est en communica-

tion avec l'atmosphère (Pour la production d'ondes non périodiques, le système C est relevé et fixé au bâti).

Les ondes produites dépendent essentiellement de la sur-



O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 axes fixes.

O'_1, O'_2 axes mobiles.

Fig. 3.

face qui assure la communication du tube avec l'atmosphère. La collerette de caoutchouc a 20 mm. de diamètre. Si sa distance à C_2 est égale à 2 mm. (surface d'ouverture 1 cm² environ), le liquide s'écoule très rapidement dans le

tube : le train d'ondes est formé de quelques ondes de grande amplitude, suivies de très nombreuses petites ondes : le train est trop compliqué. On obtient un train d'ondes plus simple en diaphragmant C_1 : avec un orifice de 2 mm. de diamètre, qui ralentit la chute de l'eau dans le tube, le train n'est formé que de quelques ondes et facile à étudier.

Que l'on utilise un robinet ouvert à la main ou un robinet automatique, le train d'ondes obtenu n'est simple qu'à une condition : la chute du liquide doit être assez lente (de l'ordre d'une seconde pour une chute d'eau de 20 cm. de hauteur).

Afin d'utiliser une source plus ponctuelle, on serait tenté de prendre des tubes de chute de faible diamètre. Après de nombreux essais, j'ai utilisé presque exclusivement des tubes de diamètres voisins de 20 mm. Si le tube est de plus petit diamètre (10 mm.), le train d'ondes est moins simple et moins bien défini ; après la chute, une bulle d'air peut être projetée à la partie inférieure du tube, ce qui produit de très nombreuses petites ondes.

On pourra objecter que le tube de verre qui touche l'eau empêche la formation des ondes et que, par suite, la source est moins bien définie que dans les procédés décrits ci-dessus. En ce qui concerne le voisinage immédiat du tube, c'est évident. Mais l'expérience semble m'avoir montré que c'est par ce procédé que l'on obtient des ondes d'amplitude assez grande et assez bien définies pour qu'on puisse les étudier. Le phénomène superficiel semble être compliqué par l'injection dans l'eau du bassin de la masse d'eau contenue dans le tube. Je crois que cet effet est peu important si on se limite à des chutes d'eau assez lentes. Je montrerai plus loin qu'à 10 cm. de l'axe de chute, le mouvement du liquide à 30 mm. de la surface libre est insensible.

Production d'ondes périodiques. — Les ondes périodiques peuvent être obtenues par de très nombreux procédés. Pour

L'étude des ondes stationnaires, on peut produire les oscillations propres de la surface par balancement du bassin ou des oscillations forcées à l'aide d'un système mécanique.

Pour l'étude des ondes périodiques elles-mêmes, il faut empêcher la réflexion des ondes sur les bords de la cuve ; pour les ondes de très faible longueur d'onde et de petite amplitude, l'amortissement est souvent suffisant pour supprimer les ondes réfléchies. Pour les plus grandes amplitudes, on peut placer vers les bords du bassin de petits cylindres verticaux (brise-lames) : avec des ondes de quelques millimètres de hauteur au centre de production, les essais que j'ai tentés sont restés sans succès : on diminue bien l'amplitude des ondes réfléchies, on ne les supprime pas.

Les ondes de petite longueur d'ondes et de faible période (rides capillaires) s'obtiennent très facilement par oscillations de systèmes mécaniques (diapasons, lames vibrantes, etc.), par jets d'air interrompus ou non, par attraction électrostatique.

Pour obtenir des ondes périodiques de plus grande longueur (prédominance de la gravité), j'ai encore utilisé le système du tube.

Le tube étant en communication avec l'atmosphère par un robinet de verre et l'eau étant soulevée d'une certaine hauteur, il suffit d'ouvrir le robinet et de le fermer pour produire un abaissement, puis des oscillations du liquide dans le tube. Comme on le verra par la suite, la période et l'amplitude des oscillations dans le tube dépendent de la hauteur de l'eau qui s'écoule. Il est assez difficile de produire à la main un écoulement déterminé du liquide.

L'emploi d'un robinet automatique est ici imposé. Il faut pouvoir ouvrir le robinet puis le fermer au bout d'un temps variable mais bien défini. A cet effet, le bras E_2 du levier O_2 (fig. 3) soutient le système mobile C quand le robinet est fermé et l'abandonne à l'ouverture. Le système tombe et

referme le robinet par l'intermédiaire des deux leviers O_3 et O_4 . L'écrou E permet de faire tomber le système de plus en plus haut et modifie le temps d'ouverture de zéro à quelques dixièmes de seconde. Pour obtenir une ouverture de plus longue durée, il suffit d'augmenter la masse M en maintenant toutefois une différence de masse suffisante entre C_3 et M pour que la pression de C_2 sur le caoutchouc soit assez grande.

A condition d'huiler très légèrement le cylindre C_3 qui glisse dans le cylindre creux, les trains d'ondes obtenus sont bien identiques en période et amplitude.

Les oscillations de l'eau dans le tube sont amorties, mais assez peu pendant les deux secondes ou moins que dure la propagation des ondes superficielles du centre au bord du tube.

J'indiquerai plus loin comment j'ai obtenu des ondes de période assez grande en utilisant soit le système du tube, soit les oscillations d'un système mécanique. En ce qui concerne les ondes périodiques progressives je crois que, malgré la présence du tube, cette méthode est préférable aux autres, tout au moins pour les oscillations amorties de grande période et d'amplitude notable, en eau profonde.

CHAPITRE II

Méthodes optiques d'étude des ondes superficielles

I. **Nécessité des méthodes optiques.** — Pour l'observation des ondes superficielles de petite amplitude (de l'ordre du millimètre), on ne peut guère utiliser que des méthodes optiques. Pour déterminer les déplacements d'un point de la surface, on pourrait se demander si l'emploi d'un flotteur de toutes petites dimensions n'est pas possible. Si les ondes passaient en un point sans le déplacer à la surface, je crois que la méthode du flotteur donnerait de bons résultats, au moins pour les grosses ondes et des phénomènes assez lents. Mais le flotteur se déplace très légèrement et il est nécessaire de le maintenir en ne le laissant osciller que sur une verticale : ainsi que je m'en suis assuré, le mouvement du flotteur et le mouvement réel du point peuvent être fort différents, quelle que soit la méthode utilisée pour empêcher les déplacements latéraux du flotteur.

Il semble qu'aucun système mécanique ou électrique ne peut être utilisé sans risque de modifier les ondes étudiées.

II. 1^{re} méthode : **Détermination des points de la surface libre où le plan tangent est horizontal.** — La méthode est une modification de celle de Foucault pour la retouche des miroirs, très fréquemment employée pour l'étude des petites déformations ⁽¹⁾. Elle a été utilisée par Vincent ⁽²⁾. Une

⁽¹⁾ H. BÉNARD. Les tourbillons cellulaires. *Annales de Phys.* (VII), 23, 1901, p. 62.

⁽²⁾ J. H. VINCENT. *Phil. mag.* (V), 43, 411, 1897.

lentille achromatique L_1 de distance focale 100 cm., d'axe vertical, placée au-dessous de la glace formant le fond du bassin, reçoit la lumière d'un petit trou fortement éclairé

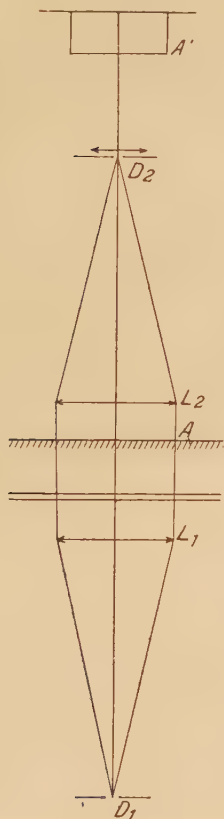


Fig. 4.

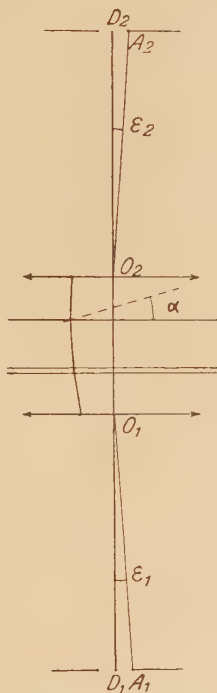


Fig. 5.

situé dans le plan focal de la lentille (fig. 4). La lumière parallèle après avoir traversé l'eau, est reprise par une deuxième lentille achromatique L_2 ($f_2 = 100$ cm.) qui la fait converger sur un petit diaphragme D_2 .

Derrière le diaphragme se trouve un objectif, photogra-

plique qui, avec la lentille L_2 forme l'image de la surface de l'eau soit sur une plaque, soit sur une feuille de papier sensible enroulée sur un cylindre d'axe horizontal. Si A' est une plaque sensible fixe, en faisant un instantané suffisamment rapide, on a sur la plaque, les images des points de la surface tels que, à l'instant considéré, la lumière passe par D_2 ; c'est-à-dire les images des points auxquels le plan tangent à la surface est horizontal (creux, crête, plan d'inflexion horizontal).

Il est préférable d'utiliser la méthode de la façon suivante : on limite le champ photographié à une étroite bande située dans un plan méridien du système de révolution, c'est-à-dire une bande coïncidant avec un rayon de propagation des ondes. L'image de cette bande se fait sur la fente horizontale du cylindre enregistreur.

En découvrant l'objectif pendant un tour du cylindre (2 secondes), on inscrit les déplacements dans le champ photographié, des creux, crêtes, plans d'inflexion horizontaux, en fonction du temps. Le temps est inscrit par un diapason (petits traits légèrement obliques par rapport au déplacement du papier). Les différentes planches reproduisent certaines de ces photographies. Une horizontale (plus grande dimension) donne les modifications successives du plan tangent en un point et permet en particulier de compter les plans tangents horizontaux qui passent successivement en ce point, et de déterminer leurs instants de passage. Sur une perpendiculaire (rayon de propagation à l'instant considéré) on peut mesurer les distances des creux et crêtes à l'axe de chute, à cet instant (Pl. I, fig. 17 bis).

Sensibilité de la méthode. — Les deux diaphragmes par où passe le faisceau lumineux, n'étant pas ponctuels, la lumière ne passe pas seulement aux points où le plan tangent est horizontal, mais aussi en tout point où le plan tangent fait avec la surface un angle inférieur ou égal à α ,

angle déterminé de la façon suivante (fig. 5) : à la limite, le faisceau parallèle provenant de A_1 , dévié par le prisme d'eau de petit angle α doit converger en A_2 , ce qui exige que :

$$(n - 1)\alpha \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

n étant l'indice de l'eau, ε_1 et ε_2 les demi-angles sous lesquels on voit les deux diaphragmes des centres optiques des lentilles correspondantes. Dans la plupart des expériences, $D_1 = 1,2$ mm. et $D_2 = 1,4$ mm. avec $n = \frac{4}{3}$.

$\alpha \leq \frac{4}{1000}$ de radian. — Pour se rendre compte de la sensibilité, on peut dire qu'une onde sinusoïdale de $1/10$ mm. d'amplitude devrait avoir une longueur d'onde supérieure à 15 cm. pour qu'on ne s'aperçoive pas de son passage. On pourrait d'ailleurs augmenter la sensibilité en diminuant les diamètres des deux diaphragmes, mais ceci aux dépens de l'éclairement de l'image photographique. On risquerait fort de ne pas voir les ondes d'amplitude assez grande et de faible longueur.

Cette méthode optique permet d'étudier le phénomène tout près du tube de chute, jusqu'au point où le liquide est relevé le long du tube par capillarité, soit à 1 cm. environ du tube dans ces expériences.

La mesure du grandissement du système lentille objectif s'effectue en remplaçant la surface de l'eau par une règle de verre graduée que l'on photographie. L'existence d'un point lumineux à la surface liquide (voir méthode suivante) permet de faire facilement ce remplacement avec précision ; en supposant que ce remplacement ne se fasse qu'à un millimètre près, l'erreur de ce fait sur la mesure du grandissement est inférieure à $1/1500^0$.

Exploration d'un rayon de propagation des ondes. — Dans une expérience, on photographie les déplacements des plans tangents horizontaux sur une longueur du rayon de 10 cm.

Le système optique étant fixe, on déplace de 10 cm. le tube de chute sur la glissière graduée et on étudie le rayon par longueurs de 10 cm. Pour obtenir les déplacements des ondes, du voisinage de la source au loin, on raccorde les différents clichés obtenus, ce qui est facile par suite de la présence des perturbations des ondes. La seule condition est que la vitesse de rotation du cylindre soit constante. La constance de cette vitesse pendant un tour est relativement facile à réaliser en donnant au cylindre un très grand moment d'inertie. Il est beaucoup plus difficile d'obtenir la même vitesse dans les expériences successives. J'ai utilisé le montage bien connu : l'induit d'un petit moteur est alimenté par une batterie de 20 volts sans rhéostat ; les inducteurs sont en dérivation avec un rhéostat qui règle la vitesse. Les résultats ne sont pas merveilleux : on atteint péniblement une constance de la vitesse à 10/0 et même sans certitude.

Il existe de nombreux régulateurs de vitesse qui permettent d'obtenir mieux que cela, mais leur emploi présente toujours un inconvénient : celui de produire trop de vibrations, ce qu'on ne peut admettre dans cette méthode. Je suis arrivé à faire tourner le cylindre à deux tours par seconde à vitesse constante à 1/2 0/0 près en fixant sur le cylindre une roue dentée de 200 dents. Devant les dents se trouvent deux électros parcourus par le courant du secteur à 50 périodes par seconde. Le système fonctionne en moteur synchrone à réluctance variable, après lancement et accrochage. La vitesse de rotation a les mêmes variations que la fréquence du secteur. A Paris, actuellement, ces variations atteignent 1/2 0/0 au maximum.

III. 2^e méthode : Détermination de la hauteur d'un point au-dessus ou au-dessous de la surface libre au repos, en fonction du temps. — La méthode précédente donne en quelque sorte la projection horizontale des particularités du train

d'ondes ; mais ne donne aucun renseignement sur les déplacements verticaux. La méthode suivante comble cette lacune, d'une part, et, d'autre part, par recouplement, permet de vérifier les indications de la précédente.

Principe. — Un rayon lumineux tombe, à 45° , en un point de la surface de l'eau. Après réflexion, il est reçu par un objectif dont l'axe est incliné à 45° également. Le papier

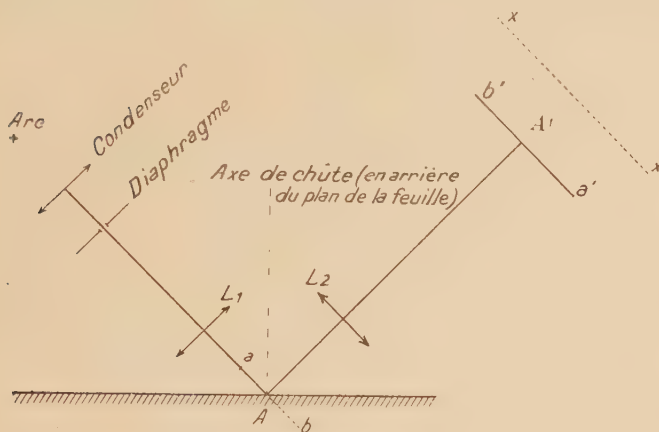


Fig. 6.

sensible perpendiculaire au rayon réfléchi est mis au point exactement sur A (fig. 6). Le plan d'incidence pour le liquide au repos — de symétrie pour les systèmes optiques projecteur et récepteur — est perpendiculaire au rayon de propagation des ondes passant par le point A. Au repos, l'image de A est en A' ; lorsque, au passage d'une onde, le rayon lumineux frappe l'eau en a, l'image se fait en a', dans le plan de symétrie, quelle que soit l'inclinaison du plan tangent en a. Si a'b' est une feuille de papier sensible enroulée sur un cylindre tournant autour de x'x, on enregistre, dans le temps, les déplacements du point de contact du rayon incident avec la surface liquide.

On ne détermine pas ainsi rigoureusement les hauteurs verticales du point A au-dessus ou au-dessous de sa position de repos ⁽¹⁾. Si, en effet, le point de chute est très voisin du point photographié, par suite de la forte courbure horizontale de l'onde, le point *a* qui donne son image, a une cote inférieure à celle de A au même instant (en supposant que A est au voisinage d'une crête) (fig. 7).

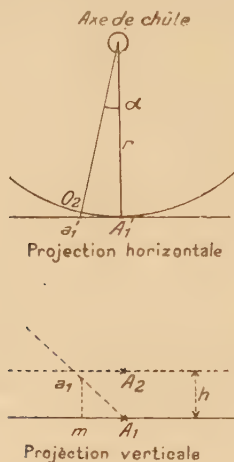


Fig. 7.

Je suppose qu'une crête va passer en A. Soit $A_1 A_2$ la hauteur actuelle du point A. Le rayon incident ne rencontrera pas la circonférence de cote $A_1 A_2$, mais la circonférence de cote ma_1 telle que $ma_1 = mA_1$. La différence de ces deux cotes, toujours petite si les ondes ne présentent jamais un plan tangent trop incliné sur le plan horizontal — ce qui est le cas dans ces expériences — peut être calculée : la distance horizontale des deux circonférences est :

$$a_1' o_1 = d = A_1' a_1' \times \frac{\alpha}{2} = \frac{(A_1' a_1')^2}{2r} = \frac{mA_1'^2}{2r}.$$

(1) La méthode serait rigoureuse pour des ondes rectilignes.

Si Δh est la différence de cotes :

$$m\Delta_1 = h - \Delta h \quad \text{et} \quad d = \frac{(h - \Delta h)^2}{2r} = \frac{h^2 - 2h\Delta h}{2r}.$$

i étant l'angle de la normale à l'onde avec la verticale (angle petit) :

$$\Delta h \leq id.$$

Le signe égal donne :

$$\Delta h = \frac{i}{2r} (h^2 - 2h\Delta h)$$

ou :

$$\Delta h = \frac{ih^2}{2(r + ih)}, \quad \frac{\Delta h}{h} = \frac{ih}{2(r + ih)}.$$

Si A_1 est voisin du sommet, i est très petit. Si A_1 est au voisinage de sa position de repos, h est très petit et i est au maximum égal à $1/10^\circ$ de radian (méthode suivante). Dès que r atteint quelques millimètres, ih est négligeable devant r et :

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{ih}{2r}.$$

Si l'on veut connaître h avec une erreur inférieure à $1/100^\circ$ il faudra que :

$$r > 50 ih.$$

En prenant même pour i et h des valeurs maxima $i = 1/10^\circ$ et $h = 2$ mm. on trouve $r > 10$ mm.

Je montrerai plus loin que l'on ne peut même pas s'approcher aussi près de la source. Comme, de plus, la précision des mesures est loin d'atteindre le $1/100^\circ$, il n'y a pas à tenir compte de l'erreur signalée ci-dessus.

Réalisation expérimentale. — La lumière d'un arc, condensée sur un très petit diaphragme est reçue par un objectif à court foyer incliné à 45° sur l'horizontal. L'image du diaphragme se fait exactement à la surface de l'eau du bassin. Le faisceau lumineux sortant de l'objectif doit être :

1° assez ouvert pour que l'éclairement de l'image définitive soit suffisant : le pouvoir réflecteur de l'eau, sous l'incidence 45° , est 3 o/o et l'image balaye le papier sensible ⁽¹⁾ à une vitesse qui peut aller jusqu'à 20 cm. par seconde ;

2° assez délié pour que son intersection par la surface soit assez petite, même pour une dénivellation assez grande de la surface, ce qui contribuera à conserver à l'image une certaine netteté.

Réglage du système optique. 1° On vérifie que le faisceau incident est incliné à 45° sur le plan horizontal avec un petit théodolite. Il faut alors :

2° amener le papier sensible et le rayon incident moyen à être conjugués par rapport à l'objectif récepteur. Il est difficile de faire coïncider exactement une graduation sur verre avec le rayon incident moyen et d'en faire une image sur le cylindre : cette mise au point est imparfaite.

Le grandissement de l'objectif photographique doit être assez grand si l'on veut que les petits déplacements du point photographié soient suffisamment amplifiés et lisibles : ceci rend la mise au point assez délicate ;

3° amener le point lumineux image du diaphragme à la surface de l'eau ; il est nécessaire que cette condition soit satisfaite exactement pour que, d'une part, l'image sur le papier sensible soit nette, et que, d'autre part, les déplacements de l'image soient rectilignes : c'est ce que montre le

(1) Le papier sensible (spécial pour enregistreurs), utilisé dans ce travail, a été, en majeure partie, mis gracieusement à ma disposition par M. A. LUMIÈRE à qui j'adresse tous mes remerciements.

résultat suivant, qui indique à peu près jusqu'à quelle distance minimum du point de chute la méthode est applicable.

Au voisinage de l'axe de chute, la courbure verticale des ondes et l'inclinaison maximum du plan tangent peuvent être assez grandes. Si le cône lumineux sortant de l'objectif de projection L_1 est coupé par la surface de l'eau assez loin du sommet du cône, les rayons lumineux réfléchis ne passent pas tous dans l'objectif récepteur. La tache lumineuse sur le papier sensible peut ne plus être l'image d'un point du rayon incident moyen, mais celle d'un point en dehors.

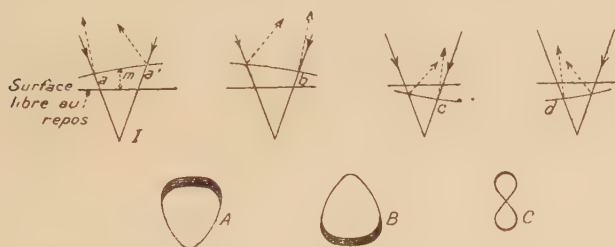


Fig. 8.

La figure 8 montre ce qui se passe quand le sommet du cône assez ouvert est au-dessous de la surface de l'eau (j'ai supposé, par commodité, que les axes des objectifs étaient verticaux et j'ai exagéré l'ouverture du faisceau). En I, au début du passage de l'onde, alors que toute la surface de l'eau intérieure au cône devrait donner une image autour de celle de m , ce sont les points voisins de a seulement qui donneront une image, les rayons réfléchis en a' ne tombant pas dans l'objectif récepteur. Les figures montrent qu'on verra l'image se déplacer suivant la courbe A au passage de l'onde. Une figure identique montre que le déplacement de l'image se ferait suivant B si le sommet du cône lumineux était au-dessus de l'eau. Enfin, si le sommet du cône est sur la surface et les ondes de grande courbure, la courbe C

décrite par l'image est un 8. Si l'amplitude reste petite et le faisceau pas trop ouvert (ici $1/3,5$ environ) les points tels que $abcd$ restent très voisins de m . L'image décrit une droite. Ces résultats sont parfaitement bien montrés par l'expérience.

D'où la mise au point : A l'aide de l'objectif projecteur L_1 , on amène approximativement l'image du diaphragme à la surface de l'eau. On met au point sur le papier sensible en déplaçant L_2 . On produit des ondes (par gouttes) à 5 ou 6 cm. du point photographié. Le déplacement de l'image sur l'écran est en général une courbe. On soulève ou abaisse la surface de l'eau (suivant la forme initiale de la courbe) jusqu'à ce que le déplacement de l'image soit rectiligne ou s'en rapproche le plus. Il suffit de remettre au point sur l'écran.

La distance au point de chute étant de 5 cm., on ne peut pas obtenir un déplacement rigoureusement rectiligne avec des ondes de 1,5 mm. de hauteur : c'est un 8 très aplati verticalement. La méthode n'est donc applicable pour ces ondes qu'au delà de 5 cm. et pour des ondes plus hautes, à plus grande distance.

La méthode est encore valable plus près si l'on veut mesurer seulement la hauteur maximum (creux et crêtes) et non déterminer le déplacement continu du point, ce qui nécessite un objectif L_2 assez ouvert.

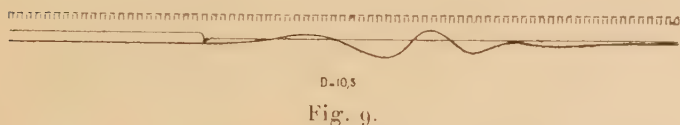
Enregistrements du temps et d'une origine des temps. — Sur la même feuille de papier sensible, en même temps que les déplacements du point, on inscrit :

1° une série de petits traits verticaux : les branches d'un diapason à 50 VD environ (exactement 48,25) portent chacune une feuille de zinc percée d'une fente. Les deux fentes placées l'une derrière l'autre sont éclairées par l'image du filament d'une lampe à bas voltage. L'intervalle de temps séparant deux traits est donc de $1/96,5$ sec. ; ils sont dis-

tants de 1 mm. environ ; on peut donc apprécier le $1/500^{\circ}$ sec. ;

2° un trait formé par l'image d'un point lumineux ; le faisceau issu de ce point est réfléchi par le miroir d'une magnéto oscillographe dont le circuit est coupé à un instant déterminé, fixe par rapport à l'origine du mouvement de chute de l'eau (fig. 2). On connaît donc les instants de passage d'une particularité du train d'ondes (crête, creux) au point A, instant rapporté à une origine fixe ;

3° un trait continu servant de repère pour la mesure des déplacements (fig. 9).



Mesure de grandissement. — J'ai mesuré le rapport du déplacement de l'image, au déplacement vertical du point de la surface, en photographiant deux plans d'eau dont la distance est déterminée par une vis micrométrique. Cette vis dont l'écrou est porté par un bâti fixe et rigide, porte un petit fil de platine de $5/10^{\circ}$ mm. de diamètre. Il est facile de déterminer le contact du fil et de l'eau (après avoir mouillé l'extrémité du fil par une première manœuvre) soit en observant la déformation produite à la surface lors du contact, soit en intercalant un galvanomètre dans un circuit électrique fermé par l'eau de la cuve et le fil de platine.

L'expérience montre que l'on retrouve ainsi la surface de l'eau propre à $1/100^{\circ}$ mm. près. On mesure donc le déplacement vertical de la surface à $1/50^{\circ}$ mm.

Pour que les images des plans d'eau soient suffisamment nettes, il faut que la distance de ces plans ne dépasse pas 2 mm. L'erreur relative commise est donc $1/100^{\circ}$. La distance des images étant 15 mm., mesurée au $1/10^{\circ}$ mm.

(erreur $1/150^\circ$), le grandissement est connu à $2/100^\circ$. En fait les mesures faites pour trois déplacements différents de la surface donnent des nombres qui diffèrent entre eux de $1/80^\circ$ de leur valeur moyenne égale à 8.

Précision de la mesure des déplacements d'un point. — Dans les mesures relatives des hauteurs d'un point au-dessus ou au-dessous de la surface libre, la seule erreur commise vient de la mesure des déplacements de l'image, faite au $1/10^\circ$ mm. Pour les déplacements maxima (5 mm. ou plus) l'erreur est alors de 2 0/0. Pour les petits déplacements (points où l'inclinaison du plan tangent est maximum), l'erreur est plus grande, mais a beaucoup moins d'importance en ce qui concerne la détermination des profils.

Pour les ondes très petites ($1/10^\circ$ mm. d'amplitude, déplacement de l'image $8/10^\circ$ mm.), l'erreur est plus grande et peut aller jusqu'à 10 0/0 ou plus.

La mesure absolue des hauteurs est faite seulement pour les creux et crêtes. A l'erreur précédente s'ajoute l'erreur sur le grandissement ; la mesure absolue est faite à 5 0/0 pour une onde de $1/2$ mm. de hauteur.

Identification des résultats obtenus par les deux méthodes. — Un petit fil métallique est placé dans le plan vertical de symétrie du système optique précédent. Il porte ombre sur le cliché obtenu dans la première méthode. Les sommets et creux de l'enregistrement sont représentés par les coupures des traits noirs de la photographie des plans tangents horizontaux. Les perturbations des ondes permettent d'identifier facilement les creux et crêtes sur les photographies et enregistrements.

Pour être certain de ne commettre aucune erreur, pendant l'ouverture simultanée des deux objectifs, je coupe le faisceau unique, provenant du chronographe qui inscrit le temps sur les deux feuilles de papier, par un volet : je déter-

mine donc le même instant sur les deux enregistrements, ce qui me permet de savoir si une ligne noire des plans tangents est un creux, une crête ou un plan d'inflexion horizontal.

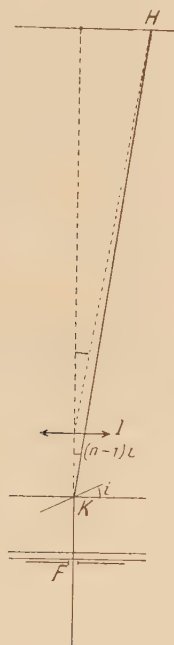


Fig. 10.

IV. Variations de l'inclinaison du plan tangent en un point de la surface. — Un faisceau vertical de lumière parallèle traverse une fente F étroite, perpendiculaire au rayon de propagation des ondes (fig. 10). Une lentille f d'axe vertical fait converger les rayons du faisceau sortant de l'eau au point H de son plan focal. Cette image H se déplace sur la fente d'un cylindre enregistreur d'axe normal à F . L'ordonnée d'un point de la courbe tracée mesure $f(n-1)i$, i étant l'inclinaison du plan tangent en K à l'instant considéré. La

méthode m'a permis de déterminer en particulier les inclinaisons maxima du plan tangent.

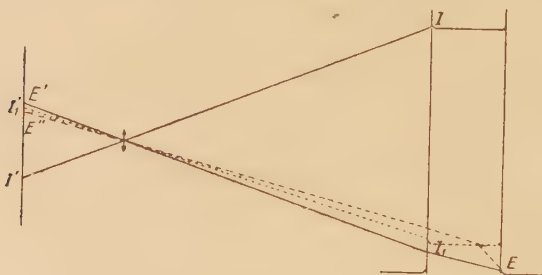


Fig. 11.

V. Inscription des mouvements de la surface à l'intérieur du tube et sur le bord extérieur. — Le tube vertical est éclairé par dessous, par un faisceau vertical de lumière sensiblement parallèle. Un objectif (fig. 11) forme sur un

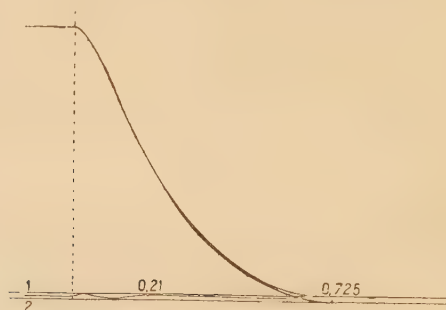


Fig. 12.

papier enroulé sur un cylindre d'axe vertical les images : du ménisque convexe I intérieur au tube et du ménisque convexe E extérieur.

Quand la surface intérieure est assez basse, E donne deux

images, l'une par réfraction à la surface latérale du tube, l'autre par réfraction à la surface horizontale.

Les traits 1 et 2 (fig. 12) sont les repères indiquant les positions de repos des deux ménisques après la chute.

On inscrit ainsi sur le cylindre tournant : les déplacements de la surface intérieure et les déplacements du ménisque capillaire extérieur, ce qui donne au moins les grosses ondes qui se forment sur le bord du tube.

DEUXIÈME PARTIE

MOUVEMENTS DE L'EAU DANS UN TUBE VERTICAL

CHAPITRE III

Chute de l'eau dans le tube

Ayant surtout utilisé la chute de l'eau dans un tube vertical pour produire des ondes superficielles, j'ai cherché à étudier complètement le phénomène. La mise en équation du problème est facile, à condition de faire plusieurs hypothèses dont la validité est plus ou moins grande. J'admets que la pression à la partie inférieure du tube, à l'intérieur, est constamment la pression atmosphérique. A cette hypothèse se rattache celle de la profondeur infinie du bassin. Enfin je ne tiens pas compte des dimensions de la cuve dans laquelle s'écoule le liquide.

J'ai cherché d'abord à savoir si ces hypothèses étaient valables.

1° *Profondeur du bassin.* — La chute de 20 cm. d'eau produite dans les mêmes conditions, a une durée sensiblement constante $0,72 \pm 0,015$ sec., la profondeur du bassin variant de 10 cm. à 10 mm. Non seulement la durée de chute est la même, mais le mouvement lui-même est très sensiblement indépendant de la profondeur : la vitesse maximum de chute ne varie que de quelques pour 100 dans les différentes chutes.

2° *Dimensions du bassin.* — Si l'on produit des chutes identiques (même tube, même immersion, mêmes hauteurs de chute et profondeurs d'eau) dans des bassins de diamètres différents, les temps de chute varient légèrement ainsi que l'indique le tableau suivant :

Hauteur de chute en cm.	Temps de chute en seconde	
	Bassin de 110 cm. de diam.	Bassin de 50 cm. de diam.
4	0,31	0,31
8	0,38	0,40
12	0,45	0,47
16	0,50	0,54
20	0,56	0,60

Pour cette dernière chute, la différence des temps 0,04 sec. donne une erreur relative supérieure à l'erreur de mesure qui ne dépasse pas 20/o. Malgré cette légère différence, j'admets que la profondeur du bassin et ses dimensions n'influent pas sur la chute (en première approximation).

Equations du mouvement de chute. — (L'axe z est vertical, dirigé vers le bas). L'une exprime que l'eau du tube s'écoule sous l'action de son poids et de la différence des forces de pression : de l'air à la partie supérieure, atmosphérique à la partie inférieure du tube :

$$\rho(h - z) \frac{d^2z}{dt^2} = p - P + \rho g(h - z), \quad (I)$$

ρ étant la densité du liquide, p la pression du gaz surmontant le liquide dans le tube, P la pression atmosphérique (la section S du tube n'intervient pas), h la hauteur initiale de l'eau.

La deuxième équation exprime que, à la partie supérieure du tube, la détente du gaz emprisonné est compensée, dans une certaine mesure, par l'arrivée de l'air par un tube plus

ou moins fin. Dans un intervalle de temps dt , le niveau de l'eau dans le tube s'abaisse de dz , la variation de pression de l'air enfermé est donnée par :

$$d[p(V + Sz)] = 0,$$

la température étant supposée invariable. La variation de pression correspondante est :

$$dp_1 = - \frac{pSdz}{V + Sz}.$$

Pendant cet intervalle de temps, il est entré dans le tube de verre un volume d'air Qdt mesuré à la pression P , Q étant le débit en volume d'arrivée d'air par le tube de caoutchouc, ce qui a eu pour effet d'augmenter la pression de :

$$dp_2 = \frac{QPdt}{V + Sz}.$$

La variation de pression est donc :

$$dp = dp_1 + dp_2 = \frac{QPdt - pSdz}{V + Sz}. \quad (\text{II})$$

Pour résoudre ces équations, il faudrait connaître l'expression de Q , débit en volume, fonction de p .

Cas particulier. — La partie supérieure du tube communique avec l'atmosphère par un tube de caoutchouc de gros diamètre intérieur et un robinet à large voie ; la pression au-dessus de l'eau est immédiatement la pression atmosphérique : l'eau doit s'écouler sous l'action de son poids. La chute d'une hauteur d'eau de 20 cm. devrait durer 0,20 sec. ; l'expérience donne 0,21 sec.

Vitesse maximum de chute. — Ne sachant pas, à priori, quelle loi du débit Q je pouvais admettre, j'ai essayé d'utiliser les résultats expérimentaux pour savoir soit si les lois

usuelles étaient valables ici, soit si l'on pouvait en déduire une de l'expérience.

Quel que soit le mouvement de chute lente, la vitesse de chute passe par un maximum; $\frac{d^2z}{dt^2} = 0$ à cet instant et par suite ($\rho = 1$) :

$$P - p = g(h - z), \quad \frac{dp}{dt} = g \frac{dz}{dt} = gu,$$

en appelant u la vitesse maximum.

L'équation (II) donne alors :

$$\frac{dp}{dt} = gu = \frac{QP - pSu}{V + Sz},$$

$$QP = pSu + gu(V + Sz) \quad \text{avec} \quad gz = gh - P + p$$

(p et z valeurs correspondant à u).

En éliminant z on obtient :

$$Q = \frac{2Su}{P} p + \frac{u}{P} (gV - SP + Sgh).$$

En supposant même que cette expression du débit, fonction de p , soit valable pendant toute la chute, elle n'est pas utilisable puisqu'elle fait intervenir u , vitesse maximum de chute.

Formules usuelles de débit d'air. — Quand la chute de l'eau dans le tube n'est pas la chute libre, l'arrivée de l'air dans le tube par le tuyau de caoutchouc est freinée par frottement dans ce tuyau. C'est ce qui produit le mouvement retardé à la fin de la chute. S'il n'en était pas ainsi, la chute du liquide serait toujours libre. Des formules usuelles donnent le débit d'air dans un tube capillaire ou non pour un mouvement permanent du gaz dans le tube : le débit est constant, ainsi que les pressions aux extrémités du tube. Ici la pression dans le tube de verre est variable, le débit également ; j'ai admis que le débit, pendant un petit inter-

valle de temps, la pression au tube étant p , est le même qu'en régime permanent.

Pour un tube capillaire, le débit est proportionnel à $P^2 - p^2$, P pression atmosphérique au robinet, p pression de l'air dans le tube de verre :

$$Q = \frac{\pi R^4}{16\eta} \frac{1}{LP} (P^2 - p^2) \quad (1) \quad (\text{III})$$

L étant la longueur du tuyau, R son rayon, η le coefficient de viscosité de l'air.

Pour un tube non capillaire :

$$Q = K \sqrt{\frac{R^5}{L}} \sqrt{\frac{P^2 - p^2}{P}} \quad (1) \quad (\text{IV})$$

Il est possible de vérifier si ces formules conviennent en utilisant le fait que la vitesse de chute passe par un maximum. Si p_1 , z_1 sont les valeurs qui correspondent à la vitesse maximum u_1 :

$$P - p_1 = g(h - z_1) \quad \text{et} \quad gu_1 = \frac{QP - p_1 Su_1}{V + Sz_1} \quad (\text{V})$$

On peut mesurer u_1 sur les enregistrements avec assez de précision, ainsi que z_1 ; on peut ainsi calculer p_1 puis Q par l'une ou l'autre des formules (III) et (IV) et chercher alors si l'équation (V) est vérifiée numériquement.

1° Débit par tube capillaire : $R = 0,15 \text{ cm}$.

$$\eta = 18 \times 10^{-5}, \quad L = 150 \text{ cm}.$$

Deux expériences différentes ont permis de calculer :

$$\begin{aligned} QP &= 8 \times 10^7 & p_1 Su_1 + gu_1(V + Sz_1) &= 26,5 \times 10^7 \\ QP &= 9,4 \times 10^7 & p_1 Su_1 + gu_1(V + Sz_1) &= 42,9 \times 10^7. \end{aligned}$$

2° Débit par tube non capillaire. On est embarrassé par le choix de K . D'expériences de Girard relatives à une longue

(1) Voir BOUSSE. Jets, tubes, canaux, pages 459 et 469.

conduite de 4 cm. de rayon (pour m'éloigner nettement du tube capillaire), j'ai déduit $K = 800$. Les valeurs de QP pour les deux expériences précédentes sont :

$$7,8 \times 10^7 \quad \text{et} \quad 9,2 \times 10^7.$$

La formule est aussi loin d'être vérifiée que l'autre ⁽¹⁾. Mais la valeur de K pouvant être trouvée trop arbitraire, j'ai cherché une valeur de K déduite des relations précédentes. Les deux expériences donnent :

$$K = 2480, \quad K = 3720.$$

En admettant même que les mesures de u_1 et z_1 soient entachées de grosses erreurs, on ne peut arriver à égaler les deux valeurs de QP et de $gu_1 (V + Sz_1) + p_1 Su_1$ ou trouver des valeurs égales pour K dans différentes expériences.

Il ne semble donc pas possible de traiter le problème complètement, en supposant même que $Q = f(p)$ étant déterminé, on sache résoudre le système des deux équations différentielles.

Interprétation des mouvements de chute. — 1° Le tube de verre est presque rempli d'eau et le tuyau de caoutchouc est étroit (2 à 4 mm. de diamètre).

Quand on ouvre le robinet, l'air se précipite dans le tube et le remplit à la pression atmosphérique ou à très peu près : le début de la chute est un mouvement de chute libre.

Pour que l'explication soit valable, j'ai calculé le temps nécessaire au remplissage du volume d'air au-dessus de l'eau, en supposant que le tuyau d'admission est capillaire. Le temps de remplissage est donné par la formule :

$$\frac{\pi R^4 P}{8\eta L} t = V \left(\text{Log}_N \frac{P + p}{P - p} - \text{Log}_N \frac{P + p'}{P - p'} \right) \quad (2),$$

(1) D'autres formules proposées ne donnent pas une meilleure vérification, pas plus que la substitution d'une détente adiabatique à une détente isotherme;

(2) Voir BOUASSE. Jets, etc., p. 471.

p' et p pressions initiale et finale dans l'espace à remplir de volume V . La hauteur d'eau étant 20 cm., le volume à remplir 10 cm³, la pression intérieure ne différera plus de la pression extérieure que de 1 mm. d'eau au bout d'un temps inférieur à $1/100^{\text{e}}$ sec. Pendant ce temps, le liquide,

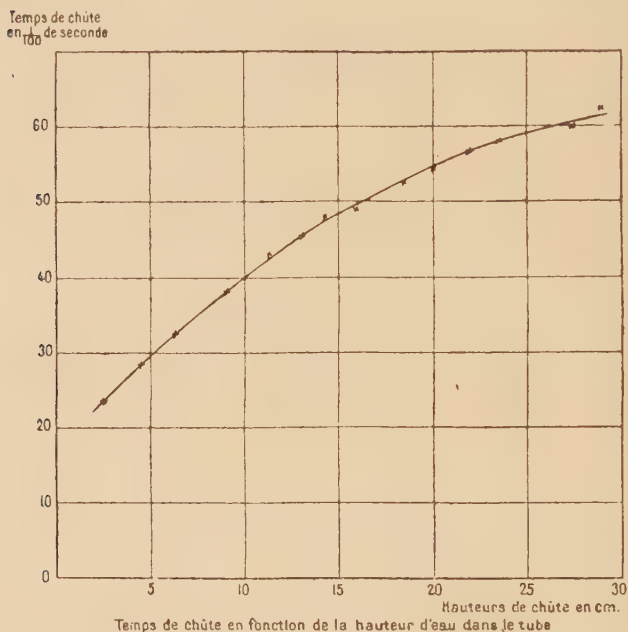


Fig. 13.

même en s'écoulant en chute libre, parcourerait $1/2$ mm. environ, ce qui est négligeable devant les 20 cm. de chute.

Le tube de caoutchouc n'étant pas capillaire, le volume à remplir l'est plus rapidement que l'indique le calcul : on peut donc admettre que la pression au-dessus du liquide est immédiatement la pression atmosphérique.

Le liquide s'écoule rapidement dans le tube, l'air extérieur ne pénètre pas assez vite par le tuyau de caoutchouc (freinage) : la différence des forces de pression, verticale ascen-

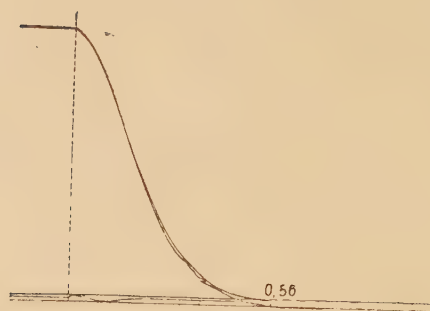
dante, peut devenir égale au poids du liquide dans le tube : l'accélération est nulle, le mouvement tend à devenir uniforme. La vitesse de chute étant trop grande pour la vitesse de rentrée d'air, la pression supérieure diminue, la différence des forces de pression l'emporte sur le poids du liquide ; le mouvement est ralenti.

La figure 13 représente le temps de chute du liquide tombant dans le même tube (même tuyau de caoutchouc) quand la hauteur d'eau varie de 2,5 à 29 cm. On pourrait chercher une relation entre H et t ; elle serait sans importance puisque, comme le montre l'expérience, elle dépendrait des dimensions du tube, du tuyau et du robinet.

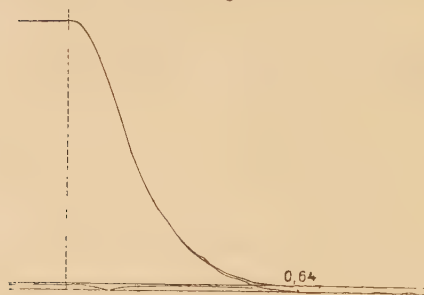
2° Le liquide du tube est surmonté d'un grand volume d'air. Quand on ouvre le robinet, l'air entre dans le tube, mais la pression n'y est plus instantanément la pression atmosphérique : le calcul précédent n'est plus valable ; le début de la chute n'est plus une chute libre. En apparence, le phénomène est le même que précédemment, la chute totale du liquide étant plus lente : si l'on produit des chutes identiques dans le tube seul puis dans le tube surmonté de ballons de 500 et 1 000 cm³, la durée des chutes est 0,56, 0,64, 0,68 sec.

Si le volume d'air est grand devant le volume du liquide soulevé, la fin de la chute est profondément modifiée : comme plus haut, la vitesse de chute prendra une valeur maximum (vitesse atteinte au bout de temps croissants avec le volume) ; l'écoulement du liquide produit une diminution rapide de pression ; l'augmentation de pression due à la rentrée d'air par le tuyau est bien inférieure à la diminution : c'est l'équivalent d'une fermeture incomplète du robinet.

Au chapitre suivant on verra : 1° que la période des oscillations du liquide dans le tube, produites par fermeture du robinet, augmente avec le volume d'air surmontant le liquide et avec la masse d'eau qui oscille ; 2° que l'amplitude des oscillations augmente avec la période et avec la



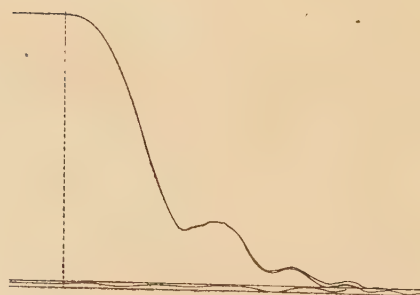
I



II



III



IV

Fig. 14.

vitesse du liquide au moment de la fermeture du robinet.

Donc, pendant la chute ralentie, au mouvement de chute, vont se superposer des oscillations de la colonne liquide, oscillations visibles si leur amplitude est grande. Dans un tube presque rempli d'eau initialement, le volume d'air est petit, les oscillations qui peuvent prendre naissance sont de faible période et par suite de petite amplitude. Elles seront à peine sensibles.

Si le volume d'air surmontant le liquide est grand, il en sera de même des périodes et amplitudes des oscillations ; elles seront parfaitement visibles. Au fur et à mesure que le liquide s'écoulera, la vitesse initiale et la masse d'eau oscillante seront plus petites, ce qui entraînera une diminution de la période et de l'amplitude des oscillations : ces conséquences sont parfaitement bien vérifiées par l'expérience.

Les figures 14, I, II, III, IV représentent la chute de l'eau dans le même tube, seul, ou surmonté de ballons de 500, 1 000, 2 000 cm³.

CHAPITRE IV

Oscillations de l'eau dans le tube

Le liquide étant soulevé dans le tube d'une certaine hauteur, la fermeture, suivant rapidement l'ouverture du robinet produit des oscillations de la colonne liquide. A la surface du liquide dans le bassin, naissent des oscillations forcées dues à celles du tube.

Le problème des oscillations d'un liquide dans un tube a été traité bien souvent : Young (tube immergé dans l'eau, oscillations au voisinage du niveau extérieur), Bernouilli (tube coudé à la partie inférieure, oscillations par déplacement du tube). J'ai repris cette étude parce que les conditions sont un peu différentes et surtout pour savoir comment obtenir des oscillations de périodes et d'amplitudes données.

Comme pour le problème de la chute totale du liquide, je pars des hypothèses suivantes : 1° la pression à l'intérieur du tube, au niveau de la surface extérieure, est constamment la pression atmosphérique ; 2° *en première approximation*, la pression de l'air, à l'intérieur du tube, lors de la fermeture du robinet, est la pression atmosphérique. Dans ces expériences, j'ai, la plupart du temps, utilisé des robinets à large voie et le robinet automatique sans diaphragme.

Avec les mêmes conventions qu'au chapitre précédent, H étant la hauteur d'eau dans le tube et V le volume d'air surmontant l'eau, *lors de la fermeture du robinet*, p la pression de l'air à t et z la distance de la surface à cet instant

au niveau de la surface à l'instant de fermeture, l'équation du mouvement s'écrit (la section du tube n'intervient pas ici) :

$$(H - z) \frac{d^2 z}{dt^2} = p - P + (H - z)g. \quad (I)$$

Ce qui suppose que le liquide oscille en bloc (en particulier la vitesse est la même aux différents points d'une section droite) ; on ne tient pas compte des perturbations à l'extrémité inférieure du tube et on néglige l'amortissement.

La pression p est donnée par la relation :

$$pV^\gamma = p(V + Sz)^\gamma$$

dans laquelle γ est le coefficient relatif aux compressions et détente du gaz.

L'expérience montre que quand le volume V d'air emprisonné au-dessus du liquide est petit, les oscillations sont de très petite amplitude, souvent même insensibles. On peut donc toujours écrire, Sz étant petit devant V :

$$p = \frac{P}{\left(1 + \frac{Sz}{V}\right)^\gamma} = P \left(1 - \frac{Sz\gamma}{V}\right),$$

$$p - P = - \frac{PSz\gamma}{V},$$

ce qui conduit à :

$$(H - z) \frac{d^2 z}{dt^2} + z \left(g + \frac{PS\gamma}{V}\right) = Hg. \quad (II)$$

Pour aller plus loin, j'ai négligé z devant H dans le coefficient de $\frac{d^2 z}{dt^2}$: cette approximation est légitimée par l'expérience : les oscillations de grande amplitude ne prennent naissance que si la masse d'eau qui oscille est grande ; dans tous les cas, le rapport $\frac{z}{H}$ n'est qu'une petite fraction de l'unité ; il n'est pas toujours légitime de faire la même suppression dans le deuxième terme de (I), ce qui

reviendrait à négliger g devant $\frac{S\gamma P}{V}$; ceci n'est valable que dans certains cas, quand V est petit. Cette deuxième suppression revient à écrire que les oscillations ne sont dues qu'au gaz qui fait ressort. L'équation s'écrit alors :

$$H \frac{dz^2}{dt^2} + z \left(g + \frac{PS\gamma}{V} \right) = Hg.$$

Le déplacement de la surface est :

$$z = \frac{gH}{g + \frac{SP\gamma}{V}} + z_0 \sin(\omega t + \varphi).$$

Le déplacement de la surface est :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{H}{g + \frac{SP\gamma}{V}}}.$$

Validité des hypothèses. — Avant de passer aux résultats expérimentaux, voyons si les hypothèses sont toujours valables ; en particulier, peut-on toujours admettre que la pression du gaz dans le tube, à la fermeture du robinet, est P , pression atmosphérique ? On peut calculer le déplacement z_∞ du ménisque entre l'instant où l'on ferme le robinet et celui où le liquide est revenu au repos, avec les mêmes hypothèses que plus haut, mais en écrivant que la température du gaz est redevenue la température initiale, ce qui revient à supprimer le terme variable et à faire $\gamma = 1$ dans l'expression de z :

$$z_\infty = \frac{gH}{g + \frac{SP}{V}},$$

ou bien, si l'on appelle H' la hauteur d'eau restant finalement dans le tube :

$$z_\infty = \frac{gH'V}{SP}.$$

Mes expériences ne permettent pas de mesurer z_∞ puis-

que l'on ne connaît pas la hauteur d'eau à la fermeture du robinet, mais seulement la hauteur à l'ouverture et la hauteur finale. Mais la différence de ces dernières donne une valeur maximum de z_{∞}

Voici les résultats de deux expériences :

$$1^{\circ} \quad H' = 10,6 \text{ cm}, \quad V = 1800 \text{ cm}^3, \quad S = 2,83 \text{ cm}^2,$$

$$P = 10^6 \text{ dynes.}$$

La formule donne :

$$z_{\infty} = 6 \text{ cm } 6.$$

L'eau était soulevée avant la chute de 20,2 cm., et s'est abaissée finalement à 10,6 cm. ; l'abaissement z_{∞} calculé est possible quoiqu'il semble un peu grand.

2° $H' = 16,5 \text{ cm.}$, $z_{\infty} = 10,3 \text{ cm.}$ La différence des hauteurs initiale et finale de l'eau est 3,6 cm. L'hypothèse en question n'est donc pas valable ici. Le volume de gaz surmontant le liquide est grand, l'air ne rentre pas assez vite pour que la pression du gaz à la fermeture du robinet soit la pression atmosphérique.

Si l'on fait le calcul en remplaçant cette pression par P' inconnue inférieure à P et si l'on applique les résultats à l'expérience citée plus haut, on trouve que P' égale la pression atmosphérique diminuée d'une hauteur d'eau de l'ordre de 10 cm.

Le calcul de la période des oscillations donne une formule identique à la précédente, dans laquelle P est remplacé par P' . L'erreur sur la période, dans le cas de l'expérience précédente serait de $1/300^{\circ}$, bien inférieure à l'erreur de mesures. Je conserverai donc l'hypothèse dans le calcul des périodes des oscillations. Elle est certainement valable quand V n'est pas trop grand.

Compressions et détente du gaz. — Sont-elles isothermes ou adiabatiques ou plus exactement se rapprochent-elles plutôt d'un mode que de l'autre.

Si les oscillations se produisent après une chute d'eau de plusieurs centimètres, on constate que leur zéro est au-dessous de la position finale du ménisque, au repos ; si l'eau s'écoule de quelques centimètres seulement, le zéro et la position finale coïncident. A l'ouverture du robinet, le gaz surmontant le liquide est comprimé et échauffé ; en première approximation, l'élévation de température est proportionnelle à la différence des pressions : elle sera grande quand l'ouverture du robinet sera prolongée, d'après les résultats des expériences précédentes. Si la détente du gaz après fermeture du robinet est isotherme, le gaz reste échauffé par la compression initiale ; il se refroidit en revenant à la température ambiante, et, son volume diminuant, le zéro des oscillations doit toujours être au-dessous de la position finale du ménisque. Si la détente est adiabatique, le refroidissement diminue l'échauffement initial, peut même le compenser : la surface du liquide dans le tube oscille dès le début autour de sa position d'équilibre final. L'expérience permet donc de conclure que les compressions et détentes du gaz sont à peu près adiabatiques, même pour une fréquence faible de 2 par seconde.

Formule donnant la période des oscillations. — Il est possible de déterminer la hauteur d'eau dans le tube lors de la fermeture du robinet, en inscrivant directement l'instant de fermeture sur le papier à l'aide d'un oscillographe ; mais les résultats obtenus sont connus depuis longtemps : en supposant valables les hypothèses, la période des oscillations correspond à un γ compris entre 1 et 1,4 ; effectivement, dans une expérience, on mesure $T = 0,35$ sec. ; les périodes calculées par la formule trouvée précédemment sont 0,33 et 0,375 sec., avec $\gamma = 1,4$ et $\gamma = 1$. D'ailleurs la valeur de γ calculée à partir de la formule et de la période mesurée, est variable avec l'expérience.

Ici, je me suis proposé de rechercher une formule permet-

tant de calculer la période des oscillations, ne contenant pas H , difficilement accessible à l'expérience ; pour cela, j'ai modifié la formule théorique en remplaçant H par H_1 hauteur moyenne de l'eau qui oscille dans le tube. Cette hauteur est déterminée sur les enregistrements eux-mêmes : j'admets que les oscillations sont sinusoïdales amorties ; leur zéro s'obtient en cherchant la droite horizontale coupée par la courbe en longueurs égales.

Le tableau II donne dans les quatre premières colonnes les valeurs de la période calculée par les formules ci-dessous et la période mesurée :

$$\begin{array}{ll} (1) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{H_1}{g + \frac{SP\gamma}{V}}} & (3) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{H_1}{g + \frac{SP}{V}}} \\ (2) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{H_1 V}{SP\gamma}} & (4) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{H_1 V}{SP}} \end{array}$$

Le tableau supérieur est relatif aux expériences faites avec un tube de 19 mm. de diamètre intérieur, surmonté ou non d'un ballon ; le tube de caoutchouc a 3 mm. de diamètre. La hauteur d'eau initiale est voisine de 20 cm.

La formule (4) donne des périodes nettement supérieures aux périodes mesurées, la formule (1) des périodes inférieures. Pour les petites périodes, (2) et (3) sont assez bien vérifiées. Dans l'ensemble, c'est (3) qui représente le mieux les résultats expérimentaux. Pour les petites périodes, les différences tiennent à l'imprécision de la mesure. Il ne faudrait évidemment pas en conclure que les détentes et compressions du gaz sont isothermes ; au contraire, on passe de la formule :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{H}{g + \frac{SP\gamma}{V}}} \quad \text{à} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{H_1}{g + \frac{SP}{V}}}$$

en diminuant H ; il faut par suite diminuer le dénomina-

teur si l'on veut conserver la même période (γ passe de 1,4 à 1).

TABLEAU II

Volume du ballon en cm ³	Périodes calculées par les formules				Périodes mesurées	H ₁ en cm.
	1	2	3	4		
2255	0,465	0,60	0,515	0,70	0,50 ₅	13,9
»	50	64	55	76	54 ₅	16
»	395	50	435	60	44	10
»	245	315	27	37	29	3,8
1800	30	36	33	42	32 ₅	6,7
»	385	46	42	54	41	11
»	415	495	455	59	43 ₅	13
»	45	53	49	63	47	15,2
»	485	58	53	68	51	17,6
895			125	145	16 ₅	1,5
»	265	30	305	355	30	8,7
»	295	33	335	39	32	10,9
»	315	35	36	415	34	12,4
»	345	385	39	45	38	14,9
»	38	50	435	425	41 ₅	18,4
530	16	17	185	205	19	4,5
»	21	23	24	27	24	8,2
»		275	295	33	28	12
»		31	33	37	31 ₅	15,4
»		335	36	40	34	18,2
»			16		16	18,6
»			15		16	15,8
»			13		16	12,8

Tube de grand diamètre 34 mm.		
$V = 1420 \text{ cm}^3$		
T (formule 3)	T. mes.	H ₁
0,33	0,32	18,5
0,33	0,30	17,6
0,29	0,27 ₅	14,5
0,275	0,26	12,3
0,235	0,22 ₅	0
0,18	0,20	5,2

La formule (3) peut donc être considérée comme une formule pseudo-théorique qui donne la période des oscillations. La figure 15 représente les variations de T^2 avec H_1 pour un même tube et un même ballon.

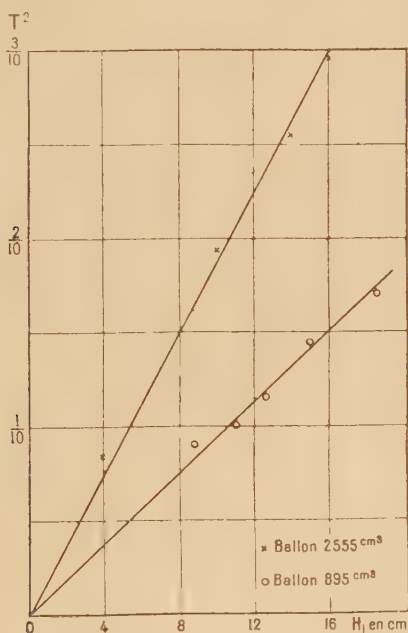


Fig. 15.

Amplitude des oscillations. — Là encore il ne s'agit pas de la vérification d'une formule théorique, faisant intervenir la hauteur d'eau à la fermeture du robinet.

La formule montrera seulement dans quelles conditions les amplitudes des oscillations seront grandes ou petites.

Le déplacement du ménisque, donné par le calcul est :

$$z = \frac{gH}{g + \frac{SP\gamma}{V}} + z_0 \sin(\omega t + \varphi).$$

A l'instant 0, $z = 0$ et $\frac{dz}{dt} = u_0$ vitesse de chute à cet instant.

Ces conditions initiales donnent :

$$z_0 \sin \varphi = -\frac{gH}{g + \frac{SP\gamma}{V}} \quad \text{et} \quad z_0 \cos \varphi = \frac{u_0}{w}$$

$$z_0^2 = \frac{u_0^2 T^2}{4\pi^2} + g^2 \frac{H^2}{\left(g + \frac{SP\gamma}{V}\right)^2},$$

$$z_0^2 = \frac{T^2}{4\pi^2} \left(u_0^2 + \frac{T^2 g^2}{4\pi^2} \right).$$

L'amplitude initiale des oscillations et les amplitudes successives croissent avec u_0 et T . Ceci explique :

a) que les oscillations sont de petite amplitude :

1° quand le tube n'est pas surmonté d'un ballon : V petit, T également ;

2° quand elles se produisent au début de la chute u_0 petit ;

3° quand elles ont lieu à la fin de la chute : u_0 est petit (mouvement ralenti) et T est petit (faible hauteur d'eau en oscillation) ;

b) que l'amplitude des oscillations diminue quand on passe d'un tube de chute étroit à un tube large : T décroît quand S augmente.

L'expérience vérifie bien ces résultats qualitatifs.

Amortissement des oscillations dans le tube. — Les formules vues ont été obtenues en supposant nul l'amortissement. Il en résulte que les périodes calculées sont inférieures à celles que l'on calculerait en tenant compte de l'amortissement. Le calcul fait en déterminant approximativement le coefficient d'amortissement sur les courbes, donne une différence relative des périodes de 1/600° ; l'augmentation est tout à fait négligeable.

Quelles sont les causes de l'amortissement des oscillations ?

La viscosité de l'air et celle de l'eau interviennent évidemment pour diminuer les amplitudes mais leur effet est négligeable.

Un calcul approximatif, dans lequel on admet que la vitesse de chute est la moyenne des vitesses des cylindres liquides coaxiaux glissant les uns dans les autres, donne, pour facteur d'amortissement dans une expérience donnée (Coefficient de viscosité de l'eau $1/100$), $a = 0,04$. L'inscription des oscillations permet de mesurer $a = 0,8$ environ. L'amortissement est donc beaucoup plus grand que celui dû à la viscosité des fluides.

La cause la plus importante de l'amortissement doit être la suivante : à chaque demi-oscillation vers le bas, le liquide expulsé du tube perd sa force vive et son énergie potentielle, communiquées aux ondes superficielles ; pendant la demi-oscillation suivante, le liquide remonte dans le tube sous l'action de la pression atmosphérique. Les oscillations se produiront pendant d'autant plus longtemps que l'énergie du gaz comprimé (ménisque à sa position la plus élevée) sera grande ; puisque la pression est sensiblement la même dans les différentes expériences, l'énergie du gaz croît avec son volume.

Effectivement, les oscillations du liquide dans un tube, avec un petit volume d'air, sont d'amplitude petite et rapidement amorties (il s'en produit quelques-unes seulement). Si le volume d'air au-dessus du liquide est grand, les oscillations de grande amplitude s'amortissent lentement,

TROISIÈME PARTIE

ONDES SUPERFICIELLES

CHAPITRE V

Ondes progressives non périodiques

Profil d'une onde à un instant donné.

Il serait intéressant de pouvoir déterminer le profil d'un train d'ondes par photographie directe. La solution serait peut-être dans l'utilisation d'un anamorphoseur amplifiant énormément les verticales et pas ou peu les horizontales. La méthode employée est beaucoup plus longue, et moins précise ; elle consiste à tracer le profil par points.

La deuxième méthode déjà décrite permet de déterminer la hauteur du point situé à x du centre de production, au temps t compté à partir d'une origine fixe. Si on fait varier la distance x on pourra reporter sur une feuille les hauteurs au même temps des différents points d'un rayon de propagation des ondes : c'est le profil au temps t .

Cette méthode ne permet d'ailleurs pas la détermination du profil d'un train d'ondes absolument quelconque ; elle n'est applicable que si l'on sait produire des trains identiques les uns aux autres. Encore est-il nécessaire de pouvoir vérifier que les différents trains successifs se ressemblent : on s'adresse à la photographie des plans tangents horizontaux.

Pour mesurer la hauteur d'un point au-dessus de la surface libre initiale, on utilise un microscope à micromètre monté sur une machine à diviser.

Si l'origine des temps (fixe par rapport au mouvement) était sur la verticale d'un trait inscrit par le chronographe, un micromètre ordinaire suffirait. Mais il en est rarement ainsi ; le système micrométrique est modifié comme suit : sur le disque de verre portant la division micrométrique se déplace un deuxième disque portant un trait gravé suivant un diamètre. La translation de ce disque, par une vis extérieure à la monture, laisse ce trait diamétral constamment parallèle aux bords de la division micrométrique.

Pour faire une mesure, on amène le bord gauche de la graduation sur l'origine des temps (déplacement du trait de l'oscillographe) à l'aide de la machine à diviser. On amène alors le trait diamétral sur l'image objective de celui des traits du temps le plus voisin de l'origine. Il suffit alors de déplacer l'ensemble par la vis de la machine, de façon que le trait diamétral vienne se placer sur les images des traits successifs donnés par le chronographe ; sur le bord gauche de la division micrométrique, on lit, en $1/10^6$ mm. la hauteur de l'onde aux $1/96,5$ sec. successifs.

Forme du profil. — Deformations. — La chute assez lente de l'eau dans un tube produit le système d'ondes le plus simple et il est encore fort compliqué.

Les figures 16 et 16 *bis* (Pl. I) représentent le profil aux différents instants indiqués, entre les distances au centre de 3,5 cm. à 16 cm.

La description suivante est celle d'un train d'ondes produit dans un tube de 19 mm. de diamètre intérieur, plongé de quelques dixièmes de millimètre dans l'eau du bassin (9,5 cm. de profondeur). Hauteur d'eau soulevée : 19,5 cm. (Pl. II, fig. 27).



Fig. 16.

Le profil du train varie rapidement pendant la propagation.

Au début, le liquide est seulement soulevé depuis le voisinage du tube jusqu'à une distance croissante avec le temps. Il se forme ensuite une crête, puis un creux, une deuxième crête et un deuxième creux (ceux-ci de faible amplitude) et enfin la surface vers le centre revient sensiblement au repos, une demi-seconde environ après l'origine des temps (cette origine est très sensiblement le début de la chute d'eau dans le tube). Il se produit encore quelques ondes, mais de très grande longueur et très petite hauteur.

Au temps $t = 1/2$ sec., il existe, à partir de la tête du train : une crête (non décelable par la méthode des plans tangents), creux, crête, creux (ce dernier de faible amplitude : 0,03 mm.).

Au fur et à mesure que le train se propage, les ondes de tête semblent disparaître, mais il en apparaît à l'arrière.

Dans le champ étudié, ici jusqu'à 58 cm. du centre de production, le nombre des ondes n'est pas constant, pas plus que la nature de ces ondes (il s'agit seulement d'ondes décelables par la méthode des plans tangents). Au temps $t = 1/96,5$ sec. le liquide est abaissé ou élevé notablement entre les points distants de 7 et 22,5 cm. du centre, et le train comprend : crête, creux, crête. Au temps $t = 1$ sec., le train d'ondes montre : creux, crête, creux et une crête qui vient de naître ; les ondes s'espacent alors sur une longueur de 19,3 cm. entre les distances au point de chute 15 et 34, 3 cm.

En réalité, la première crête du train subsiste, même loin du point de chute. A 28 cm. du centre, 0,4 sec. après le début de la chute, la crête de tête du train existe encore, sa hauteur égale 0,12 mm. : c'est ce que montre l'enregistrement des déplacements du point à 28 cm. Si la photographie des plans tangents n'indique rien aux points et temps considérés c'est que les pentes voisines de cette crête sont

trop peu inclinées sur l'horizon. On voit ici la nécessité de l'emploi simultané des deux méthodes.

L'observateur qui se trouve à 28 cm. du point de chute et qui regarde les déplacements de ce point, voit passer une succession de dix creux et crêtes (en comptant la première, de faible amplitude).

Si ce même observateur regarde l'état de la surface à un instant donné, il verra croître le nombre des ondes (en tenant compte de toutes celles qui existent). Même s'il ne s'occupe que des « visibles », il en comptera 3 au temps 70 (unités $1/96,5$ sec.), 4 au temps 90, 5 au temps 150, 6 au temps 210. Ceci tient au fait qu'il naît plus d'ondes à l'arrière du train qu'il n'en disparaît (en apparence) à la tête.

La première modification du train est donc une variation du nombre des ondes.

Déformations successives des crêtes et creux. — La photographie des plans tangents horizontaux montre de brusques déplacements d'une onde (A, Pl. II, fig. 27).

Ces crochets ne sont pas dus à des hétérogénéités des milieux que traverse la lumière, car ils se reproduisent bien régulièrement sur des trains d'ondes produits dans les mêmes conditions. On ne peut pas non plus les imputer à des irrégularités de la surface du fond de la cuve ; c'est une glace qui ne présente pas de défauts superficiels apparents et d'ailleurs ces perturbations se présentent en des points du champ photographié, très variables avec la façon dont on obtient les trains. Enfin la profondeur étant de 9,5 cm. d'eau, l'expérience montre que le fond est sans action sur les ondes de surface.

On remarque que les diverses ondes du train (en allant de l'avant à l'arrière) sont successivement déplacées vers l'avant : il semble qu'il y ait propagation d'une perturba-

tion atteignant les creux et crêtes qui se suivent ; la vitesse de cette perturbation serait inférieure à celle des ondes.

Les recoupements que l'on peut faire sur les enregistrements et sur les photographies des plans tangents horizontaux montrent qu'il y a bien effectivement propagation d'une perturbation. Les figures 17 et 17 bis (Pl. I) donnent : A, les déplacements du point situé à 8 cm. du point de chute ; B, le passage en ce même point des différents plans tangents horizontaux du train d'ondes (les deux enregistrements ont été faits ensemble ; on vérifiera sur cet exemple l'identification facile des ondes). D'après A, l'observateur



Fig. 17.

situé à 8 cm. voit passer en ce point : un point tangent horizontal au temps 24 (traduit sur A par une inflexion oblique), le premier creux du train à 32, la deuxième crête à 42. Entre ces deux derniers instants, il a vu passer une singularité à 39.

B donne les mêmes passages aux mêmes temps, pour les plans horizontaux. Si l'on joint par une droite, les premières perturbations qui atteignent le premier creux et la première crête (m et n), on constate que cette droite coupe l'axe 8 cm. au temps 39. Il est donc montré sans aucune ambiguïté qu'une perturbation se propage bien vers l'avant, d'un creux à la crête arrière, c'est-à-dire avec une vitesse inférieure à celle du creux ou de la crête.

La forme de la modification (voir sur plans tangents) indique que la crête se déplace brusquement vers l'avant pendant un temps de l'ordre de quelques centièmes de seconde. La vitesse de la crête est donc modifiée pendant

ce temps, mais reprend par la suite sa valeur initiale à peu de chose près.

J'avais d'abord admis que ces perturbations étaient dues à de petites ondes dont la vitesse serait inférieure à celle des grosses.

Il ne me semble plus que l'on puisse s'arrêter à cette hypothèse. Si en effet, la grosse crête conservait sa vitesse et sa forme (à l'amortissement près), elle ne serait affectée par la petite onde que *pendant le passage de celle-ci*, même en supposant que l'onde perturbatrice se modifie très rapidement pendant sa propagation : les droites représentant le déplacement du plan tangent horizontal, sommet de la crête, devraient être dans le prolongement l'une de l'autre, avant et après le passage de la petite onde. Or, ce fait ne s'observe jamais.

La représentation cinématique du phénomène est la suivante : une « bosse » qui semble naître peu après le début du mouvement grimpe le long de la pente de la première crête. Arrivée au voisinage de cette crête et à peu près à son niveau, elle forme un plan horizontal ; puis se surélevant légèrement, elle produit un petit creux et une crête en avant de l'ancienne crête. La nouvelle crête formée va se propager avec la vitesse de l'ancienne, mais un peu en avant de la position qu'occuperait celle-ci s'il n'y avait pas eu de modification. L'ancienne crête chemine alors vers l'avant avec une vitesse inférieure à sa vitesse initiale ; sous la forme d'une « bosse » (qui se traduit par un plan d'inflexion non horizontal) elle descend la pente arrière de la première crête du train ; les phénomènes se reproduisent au passage du premier creux puis des autres crêtes et creux.

J'ai cherché à savoir par l'expérience quelle pouvait être la cause de ces perturbations.

Elles ne sont pas dues à des défauts du bord inférieur du tube, le rodage de la partie inférieure étant terminé sur du papier à grain très fin. A titre de vérification, j'ai produit

des trains d'ondes dans les mêmes conditions, en donnant au tube diverses positions par rotation autour de son axe vertical. Les trains sont identiques, les perturbations occupent la même position.

De même, en inclinant le tube légèrement sur la verticale, d'un angle de 1° , dans un azimuth quelconque, on ne change pas la forme du train d'ondes, ni les perturbations.

On ne peut pas non plus incriminer les vibrations mécaniques du système qui permet la rentrée de l'air, les perturbations étant les mêmes quand on laisse retomber le liquide de la même façon par ouverture du robinet à main ou du robinet mécanique.

D'ailleurs, on les retrouve sur les trains produits par un procédé quelconque : chute d'un corps solide dans l'eau, soulèvement d'un disque immergé, chute d'une goutte d'eau ; dans ce dernier cas, le train est formé d'un premier système d'ondes de très petite longueur, suivi d'un ensemble de grandes ondes. Ces dernières montrent les perturbations déjà décrites. Sur les premières petites ondes, on aperçoit des modifications qui ressemblent à celles des grosses, mais qui vont plus vite que les ondes ; ces perturbations ont pour effet de déplacer brusquement l'onde à l'arrière du train. On observe un phénomène identique sur les petites ondes de la tête du train dû à l'immersion d'une sphère dans l'eau.

En résumé, ces modifications de la forme et de la vitesse de l'onde, sont caractéristiques du train d'ondes.

Relations avec l'immersion du tube, la hauteur de chute, la profondeur du bassin. — 1° *Immersion.* — En ce qui concerne les ondes produites par chute d'eau dans un tube, les perturbations sont liées à l'immersion du tube dans l'eau du bassin. Quand le tube touche l'eau, la première crête est déplacée vers l'avant par plusieurs perturbations (4 par exemple) qui se propagent dans le train. Le tube étant

immergé de 2 mm. dans l'eau, le nombre des perturbations qui affectent la première crête est encore le même, mais tous les creux et crêtes du train sont beaucoup moins modifiés que précédemment.

L'immersion du tube étant de 6 mm., il n'y a plus qu'une seule modification sensible (encore est-elle très faible) de la première crête et des suivantes.

Enfin, le tube étant immergé de 10 mm., il n'y a plus que des modifications des ondes presque insensibles, disparaissant rapidement. Ce résultat exclut la possibilité d'expliquer l'existence des perturbations par une réflexion du liquide sur le fond du récipient. La figure 28 (Pl. II) représente le train d'ondes donné par un tube immergé de 10 mm.

Si, au contraire, on soulève le tube au-dessus de la surface libre du bassin, le liquide adhérant par capillarité, les perturbations se multiplient et atteignent la première crête dès le début de sa propagation.

2° *Profondeur du bassin.* — Elle est sans grande influence sur les perturbations du train. On retrouve sensiblement les mêmes modifications de la première crête lorsque la profondeur varie de 7,5 cm. à 3 cm. La profondeur n'étant même plus que de 1,5 cm., la première crête est encore modifiée (après un parcours plus grand que pour les grandes profondeurs).

3° *Hauteur de chute d'eau.* — Elle est également sans influence. De 28,5 à 3 cm. de chute, les modifications existent, sensiblement aussi nombreuses. Mais les ondes sont beaucoup plus déformées par de grosses chutes d'eau.

Vitesses de propagation.

L'enregistrement simultané du déplacement d'un plan tangent horizontal sur un rayon de propagation, et du temps, permet de mesurer les vitesses.

Précision de la mesure. — Le temps, donné par les inscriptions du chronographe, est déterminé à $1/500^{\circ}$ sec. près. L'espace parcouru par le plan horizontal considéré peut être mesuré à $1/5^{\circ}$ mm. près sur l'image. Dans une mesure, l'espace parcouru (sur le cliché) est 26,5 mm. L'erreur sur cette lecture est de $1/135^{\circ}$; le grandissement est connu à $1/200^{\circ}$ près; le temps de parcours étant $35/100^{\circ}$ sec., l'erreur sur le temps est $1/175^{\circ}$. La mesure de la vitesse de propagation d'un plan tangent horizontal est, dans ces conditions faite à $1/175^{\circ} + 1/135^{\circ} + 1/200^{\circ} = 2/100^{\circ}$ près.

Il serait possible d'augmenter la précision de cette mesure en raccordant les clichés des différentes parties du rayon photographié; l'espace parcouru serait lu sur l'échelle devant laquelle se déplace le système producteur des différents trains d'ondes. L'erreur sur l'espace pourrait être réduite à $1/500^{\circ}$; celle sur le temps serait inférieure à $1/200^{\circ}$. Mais cet accroissement de précision est inutile, les vitesses n'étant pas définies, en général, avec cette précision et les trains produits de la même façon donnant pour vitesse moyenne d'une même onde entre les mêmes points, des nombres qui peuvent différer de 2 o/o de leur valeur.

Les différentes vitesses. — 1° *Vitesse d'un creux ou d'une crête.* — Elle est constante pendant un certain temps, tout au moins au début de la propagation.

Les différents creux et crêtes d'un même train ont alors sensiblement la même vitesse; ce qui est confirmé par la distance de deux plans tangents horizontaux qui se suivent (creux ou crête), cette distance étant mesurée entre deux perturbations.

Mais la vitesse d'une onde varie, puisque, à chaque passage d'une perturbation, l'onde s'avance rapidement. Une onde étant atteinte par des perturbations qui se suivent de plus en plus près, s'avance de plus en plus rapidement, de sorte que sa vitesse moyenne (en considérant les lieux

successifs où elle se déplace sans se déformer) augmente avec le temps.

La vitesse des premières ondes du train augmente plus rapidement que celle des dernières.

La propagation étant en quelque sorte discontinue, on ne peut chercher quantitativement comment la vitesse varie avec le temps. Il est toutefois certain que les distances parcourues par une crête, dans des temps égaux, augmentent avec le temps. Peu après la naissance d'une onde, ces distances sont à peu près en progression arithmétique, mais elles augmentent ensuite plus rapidement. Ce résultat serait à rapprocher de ceux des travaux de Cauchy et Poisson : les ondes qu'ils étudient ont des vitesses proportionnelles aux temps. Je ne vois pas bien comment on pourrait expliquer ce rapprochement, les hypothèses de Poisson n'étant pas du tout vérifiées dans ces expériences.

2° *Vitesse des perturbations.* — J'ai montré qu'il y avait effectivement propagation d'une « bosse » entre une crête et le creux qui la suit. Les photographies des plans tangents horizontaux montrent que les avancées rapides des crêtes et creux se placent sur une même droite à très peu près.

La perturbation se déplace donc avec une vitesse sensiblement constante. En réalité, elle décroît légèrement avec le temps. Ceci ne permet de mesurer cette vitesse qu'avec une précision médiocre.

Dans un train d'ondes, les vitesses des différents signaux qui franchissent les ondes sont de 20,6, 18,8, 18 cm./sec. pour les perturbations affectant d'abord la première crête. Une seule, affectant d'abord le premier creux, chemine avec une vitesse de 18,8 cm./sec.

3° *Vitesse du groupe.* — La vitesse de l'arrière du train d'ondes est bien définie. Sur un cliché, on peut facilement placer sur une ligne droite les points du champ où le plan tangent cesse d'être horizontal à l'arrière du train, par suite de la naissance d'un creux ou d'une crête.

Pour le train déjà considéré, cette vitesse est de 16,6 cm./sec. environ, légèrement inférieure aux vitesses des perturbations.

La vitesse du front de l'onde est au contraire très mal définie. On peut mesurer grossièrement la vitesse de propagation du plan tangent, qui, à l'avant du train, est incliné de $1/250^\circ$ de radian sur l'horizon ; ce plan est tourné soit vers l'avant (pente d'une crête) soit vers l'arrière (pente d'un creux) $V = 26$ cm./sec.

Dans ces conditions, la vitesse du milieu du train serait environ $\frac{16,6 + 26}{2} = 21,3$ sec./sec., le train étant limité par les deux plans tangents avant et arrière qui font avec l'horizon un angle de $1/250^\circ$ de radian. La vitesse de ce milieu mesurée directement est d'environ 22 cm./sec.

Le groupe d'ondes se propage donc avec une vitesse inférieure à celle des ondes. Et les perturbations, ainsi que l'arrière du train ont des vitesses encore plus petites.

Je me suis demandé si la formule de Lord Kelvin était vérifiée, assez loin du centre de production des ondes pour que l'on puisse les considérer comme rectilignes. On ne peut d'ailleurs mesurer qu'une longueur d'onde à un instant donné, puisqu'elle est variable ; pour l'une de ces ondes $\lambda = 5,3$ cm. ; sa vitesse à cet instant est 28,3 cm./sec. (mesure) ; la formule de Kelvin (voir Chap. VI) donnerait $V = 30,4$ cm./sec.

L'ensemble des résultats expérimentaux montre que, malgré la grande différence des modes de production des ondes, leurs vitesses sont toujours voisines du minimum donné par la théorie de Kelvin : pour l'eau $V_m = 23,1$ cm./sec. Il me semble qu'il est possible d'expliquer par ce fait la difficulté d'obtenir des ondes *périodiques* de grande longueur d'onde.

Longueur des ondes.

La distance de deux creux consécutifs n'est pas constante :

1° parce que les perturbations ne les atteignent pas en même temps ;

2° parce que le creux qui marche le premier est atteint rapidement par de nombreuses perturbations qui n'atteindront que plus tard le creux qui suit.

Quand une onde vient de naître à l'arrière du train, sa distance à l'onde de même nature qui la précède est sensiblement toujours la même : 53 mm. dans l'exemple déjà cité. Au fur et à mesure que ces deux ondes se propagent, leur distance augmente.

On peut même vérifier que, *dans quelques cas*, la longueur d'une même onde augmente de quantités à peu près égales dans des temps égaux, ce qui serait d'accord avec les résultats de la théorie de Poisson et Cauchy.

Le tableau III en donne un exemple.

TABEAU III

3° creux		4° creux	
Temps : 80	$\lambda = 5,3 \text{ cm.}$	Temps : 150	$\lambda = 5,8 \text{ cm.}$
90	6,7	160	7
100	8,5	170	8,3
110	11,6	180	9,5
120	13,5	190	11,2
130	16,8	200	12,5

A un instant donné, les longueurs d'onde décroissent quand on passe de l'avant à l'arrière du train : 17 cm, 8,5 cm., 4,2 cm.

Un observateur fixe voit passer des ondes de longueur décroissante : à 17,2 cm. du point de chute les distances entre crêtes des ondes qui passent successivement sont 14,5 cm., 9,5 cm., 5,3 cm.

Si le tube est immergé d'une dizaine de millimètres dans

l'eau, les perturbations des ondes sont moins importantes ; la propagation du versant terminant le train à la suite du creux ou de la crête qui vient de naître, se fait en deux temps : pendant un certain temps la distance des plans tangents horizontaux limitant le versant est constante, puis cette distance croît.

Hauteur des ondes.

1° *Mesure.* — Théoriquement, pour mesurer la hauteur d'une crête qui passe en un point donné, il faut construire le profil de la crête à l'instant où elle passe. Il semble qu'il soit nécessaire d'opérer ainsi parce que, d'une part, les ondes s'amortissent et que, d'autre part, elles sont atteintes par les perturbations. Mais les variations d'amplitude pendant un court intervalle de temps, sont très faibles et n'excèdent pas l'erreur commise dans la mesure ; on peut par suite déterminer la hauteur maximum de la crête sur l'enregistrement des déplacements du point en fonction du temps ; j'ai vérifié cette conclusion sur plusieurs enregistrements après avoir construit les profils point par point.

Si l'onde est atteinte par une perturbation au point considéré, il peut y avoir doute sur la validité de la méthode ; mais la perturbation modifie très peu la hauteur de la crête. Les mêmes vérifications montrent que la mesure peut encore être faite pour les ondes de hauteur suffisante.

2° *Variations avec la distance parcourue.* — Quelle que soit la hauteur d'eau dans le tube central, les résultats sont les mêmes :

En ce qui concerne la première crête du train, sa hauteur décroît avec la distance parcourue, d'abord rapidement, puis plus lentement.

La courbe représentant les variations de hauteur de la première crête est formée à peu près : d'une exponentielle

$h = Ke^{-\beta r}$ depuis le point où la mesure de hauteur est possible (4 cm.) jusqu'à $r = 8$ cm. ; au delà de 8 cm., la courbe se rapproche sensiblement d'une droite.

Pour les autres creux et crêtes, l'amplitude passe par un

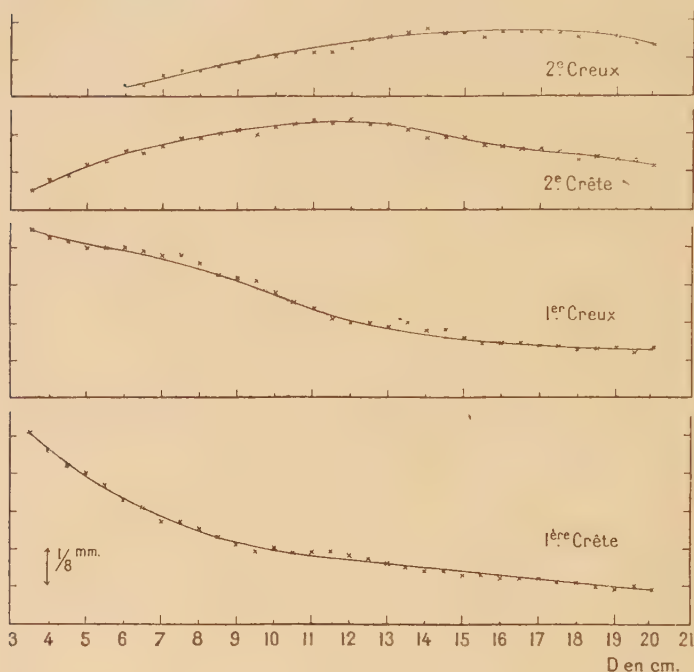


Fig. 18.

maximum, puis décroît. La figure 18 montre les variations de la hauteur avec la distance parcourue pour les creux et crêtes d'un train.

A partir d'une certaine distance, la hauteur de l'onde décroît lentement. Il ne faut pas oublier que, finalement, le niveau du liquide au repos est plus élevé que le niveau initial, de 0,05 mm. dans ces expériences.

La largeur du train d'ondes ne restant pas constante, il est impossible de chercher à vérifier une loi de décroissance

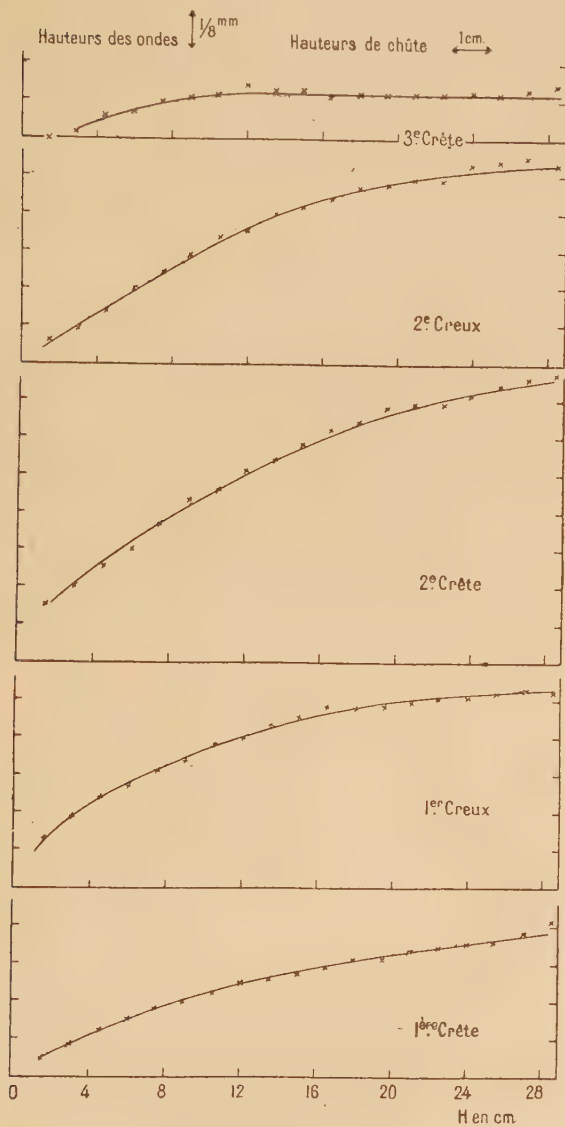


Fig. 19.

des hauteurs, même approximative, tenant compte de la forme circulaire des ondes et d'un amortissement par viscosité.

3° *Variations avec la hauteur de chute d'eau.* — La figure 19 donne les résultats : quand la hauteur d'eau dont la chute produit les ondes, augmente, la hauteur d'un creux ou d'une crête au-dessus de la surface libre, en un point donné augmente aussi, mais moins rapidement. Cette hauteur semble tendre vers une limite (au moins pour certaines ondes) atteinte quand le tube est presque rempli d'eau.

Là encore, il serait bien difficile de chercher une relation entre les deux grandeurs : si l'on n'avait à tenir compte que des énergies potentielles du liquide qui va tomber, et des ondes elles-mêmes, on trouverait la proportionnalité entre la hauteur de l'onde et la hauteur de chute (en première approximation et avec d'autres hypothèses). Le fait que cette proportionnalité n'existe pas, indique seulement qu'on est loin de pouvoir négliger toutes les énergies autres que potentielles.

Influence de la profondeur du bassin.

Pour faire varier la hauteur d'eau sans avoir à déplacer le plan d'eau photographié et sans déplacer la cuve elle-même, j'ai placé dans le bassin une glace de miroitier qui couvre la plus grande partie du fond. Cette glace est supportée par un bâti et quatre vis calantes permettant de l'élever ou de l'abaisser. Je me suis borné à l'étude des ondes pas trop loin du point de chute afin d'être certain que le mouvement de la surface n'est pas influencé par la masse liquide qui se trouve au-dessous du fond mobile.

Les expériences précédentes dont j'ai indiqué les résultats ont été toutes faites dans un bassin contenant soit 9,5 soit 10 cm. d'eau. Quand la profondeur du bassin diminue, les

ondes restent d'abord à peu près inchangées, puis le système d'ondes se complique.

Pour $h = 75$ mm., le train d'ondes est identique à celui obtenu avec $h = 95$ mm. Si $h = 68$ mm. rien ne semble encore changé, mais le premier train est suivi de nombreuses petites ondes de très faible amplitude : on peut admettre que ces ondes sont dues au mouvement des molécules qui se sont réfléchies sur le fond du bassin. Quand la profondeur diminue, le nombre des molécules qui sont projetées vers le bas et réfléchies sur le fond augmente ; elles peuvent donc former des ondes superficielles de plus en plus nombreuses, ce que l'on vérifie.

L'aspect du premier couple crête-creux se modifie peu avec la profondeur de 7,5 jusqu'à 3 cm.

La profondeur diminuant, les ondes arrières du train deviennent irrégulières, par exemple leur distance creux-crête augmente ou diminue pendant la propagation. Pour $h = 30$ mm., le deuxième creux reste fixe ou même revient vers le centre pendant $1/10^6$ sec., le train devient alors complètement irrégulier et impossible à étudier.

Ces résultats sont confirmés dans une certaine mesure par la photographie du ménisque extérieur au tube : tant que la profondeur d'eau est supérieure à 60 mm., il ne se forme sur le bord du tube que deux grosses ondes : un creux et une crête. Quand la profondeur diminue, ces deux ondes sont suivies d'autres qui, d'abord de faible hauteur, deviennent de plus en plus grosses au fur et à mesure que la profondeur diminue.

D'autre part, l'amplitude d'une même onde, au même point, varie avec la profondeur, comme l'indique le tableau IV, la première crête s'élevant d'autant plus que la profondeur est petite, tandis que c'est l'inverse pour les autres ondes.

TABLEAU IV

Profondeur du bassin en cm.	Hauteurs ou profondeurs en 1/100 mm.		
	1 ^{re} crête	1 ^{er} creux	2 ^e crête
7,5	40	59	42
6,8	40	55	42
6	42	57	44
5,2	47	54	45
4,5	47	50	39
3,8	50	30	27
3	62	30	26
2,5	70	22	17
2	81	12	12
1,5	104	13	

La hauteur de cette première crête, pour la chute d'eau considérée, peut se représenter assez bien par la formule $H(80h - 15) = 1000$, H et h exprimés en millimètres.

En résumé, lorsque la profondeur d'eau est supérieure à 7,5 cm., pour la hauteur de chute d'eau 17,5 cm., le fond du bassin semble ne pas exercer d'influence sur les ondes superficielles ; les profondeurs supérieures à celles-ci, même pour des chutes d'eau plus grandes, peuvent être considérées comme des profondeurs infinies.

Une autre question est voisine de la précédente : dans la région du tube de chute, le mouvement des particules fluides est sensible jusqu'au voisinage du fond. Je m'en suis d'ailleurs assuré en photographiant de la poudre d'aluminium en mouvement très lent dans l'eau. La particule décrit une courbe non fermée, de sens variable, suivant sa profondeur.

A une certaine distance du centre — 10 cm. par exemple — le mouvement est d'amplitude très petite, les vitesses des particules, sous l'action du mouvement liquide, sont de l'ordre de leur vitesse propre de chute ou d'ascension, je crois que la méthode de photographie des poussières est inapplicable.

Ne pouvant avoir d'indications sur le mouvement propre du fluide, j'ai cherché jusqu'à quelle profondeur le mouvement était encore sensible, à une distance donnée de l'axe : par mouvement sensible j'entends celui qui, empêché, se traduira par une modification des ondes superficielles. Pour cela, deux cylindres s'emboîtant l'un dans l'autre sont placés sur le fond de la cuve ; leur axe coïncide approximativement avec celui du tube de chute. Leur diamètre est 20 cm. on peut ainsi chercher l'effet, à 10 cm. de l'axe, d'un obstacle circulaire, centré sur les ondes, touchant le fond, son bord supérieur étant à une distance connue et variable de la surface libre.

La profondeur du bassin est 10 cm. Tant que l'obstacle est immergé à plus de 25 mm., les ondes ne sont pas modifiées. A 20 mm., on aperçoit une légère modification, à l'arrière du train. A 15 mm., les ondes, après leur passage sur l'obstacle, sont peu modifiées ; mais derrière l'obstacle, vers le point de chute et à l'arrière du train, naissent des ondes qui se propagent en sens inverse des premières : il y a eu réflexion partielle sur l'obstacle.

Quand le bord supérieur de l'obstacle n'est plus qu'à 10 mm. ou moins de la surface libre, le train d'ondes est alors fortement modifié.

Reprenant une expérience de Bidone ⁽¹⁾, j'ai opéré en sens inverse. Les deux cylindres sont fixés au tube de chute, les axes en coïncidence. Le cylindre mobile est d'abord au-dessus de l'eau, puis on l'immerge de plus en plus profondément. Si le mouvement des particules a encore une certaine amplitude, à 10 cm. de l'axe, à la profondeur d'immersion, il doit provoquer des mouvements superficiels extérieurs au cylindre.

Jusqu'à 20 mm. d'immersion, les ondes passent de l'autre côté de la paroi, naturellement avec modification. Dès que

(1) BIDONE. Expériences sur le remous et la propagation des ondes. *Mémoires de l'Académie de Turin*, 1820.

la base du cylindre est à plus de 30 mm. de la surface libre, les ondes ne passent plus.

Ces résultats sont d'accord avec les précédents.

Immersion du tube dans l'eau du bassin.

Le temps de chute varie peu avec l'immersion. Quand le tube touche l'eau, le temps de chute est 0,72 sec ; il diminue légèrement quand on immerge de plus en plus le tube dans l'eau et l'immersion étant de 9 cm. dans un bassin contenant 10 cm. d'eau, la chute dure 0,63 sec.

Alors que, dans le premier cas, la chute ralentie est assez longue, elle est plus courte dans le deuxième.

Quand l'immersion augmente, on constate que la surface de l'eau, à l'intérieur du tube, oscille après la chute. Rien de semblable ne se produit quand le tube touche l'eau : la chute terminée, le liquide reste immobile dans le tube. La période et l'amplitude de ces oscillations croissent quand l'immersion augmente. On doit rattacher ces observations à l'étude des oscillations (Chap. IV). Elles seraient d'accord avec la théorie en admettant que c'est l'eau intérieure au tube qui oscille, seule ou à très peu près.

La partie inférieure du tube étant immergée dans l'eau, les perturbations qui atteignent la première crête sont moins nombreuses, et on les supprime à peu près complètement par une immersion de 10 mm. (fig. 28, Pl. II). En même temps, la hauteur d'une onde diminue. Sur le bord du tube lui-même, les ondes ne sont plus d'amplitude mesurable dès que le tube est immergé de 60 mm. dans 100 mm. d'eau.

De même, à une distance donnée de l'axe, la hauteur d'une même onde diminue avec l'immersion, celle de la première crête diminuant moins rapidement que celle des autres. Ainsi, à 8 cm. de l'axe, le tube touchant l'eau, les hauteurs de la première crête et du premier creux sont 0,42 et 0,83 mm. Quand le tube est immergé de 15 mm., les hauteurs sont 0,26 et 0,25 mm.

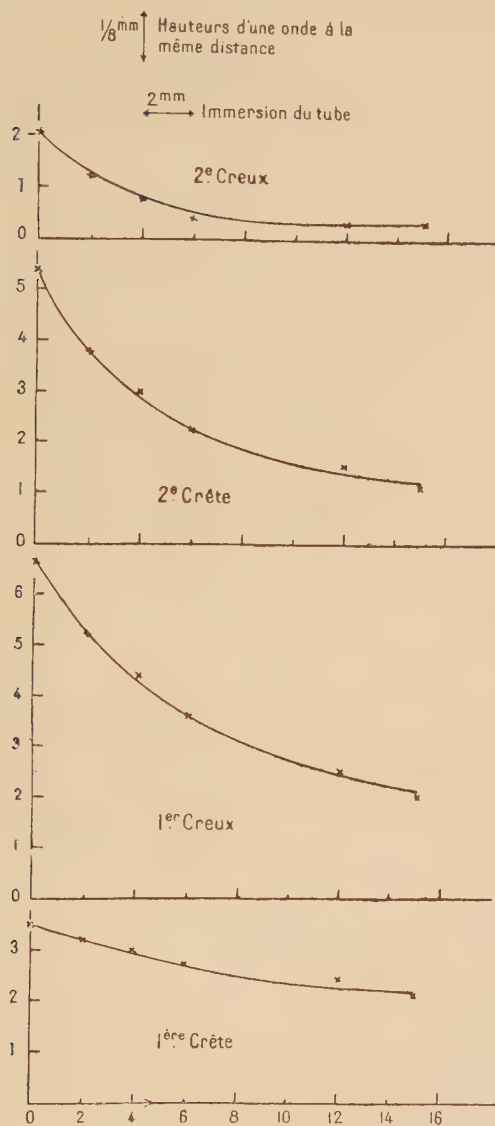


Fig. 20.

La figure 20 représente ces variations.

Donc l'immersion du tube dans l'eau permet d'obtenir, pour une hauteur de chute donnée, des ondes présentant peu d'irrégularités, mais aux dépens de leur amplitude.

Formation des ondes superficielles.

1. **Durée de formation des ondes.** — Relations avec la chute d'eau. — Certaines observations m'ont conduit à chercher comment se forment les ondes superficielles produites par chute d'eau.

Il faudrait pouvoir étudier complètement l'onde dans les premiers centimètres autour du tube. La méthode des déplacements est inapplicable. Celle des plans tangents horizontaux donne des renseignements jusqu'au point relevé vers le tube par capillarité (10 mm. environ du tube pour un diamètre d'une vingtaine de millimètres). Mais la photographie du ménisque extérieur au tube permet d'étudier au moins les grosses ondes.

Voici les résultats d'une expérience : on soulève 20 cm. d'eau dans un tube de 19 mm. de diamètre intérieur, immergé de quelques dixièmes de millimètre dans l'eau du bassin. L'eau s'écoule en 0,82 sec.

Au bord du tube de chute, l'eau est d'abord soulevée, une crête s'y forme au temps $t = 0,03$ sec., puis l'eau s'abaisse au-dessous de son niveau primitif et il existe un creux au temps $t = 0,12$ sec. On peut encore remarquer sur le papier une crête de très faible hauteur, non mesurable, à 0,25 sec. environ. Puis l'eau redevient tranquille au voisinage immédiat du tube.

Le grandissement du système optique est $1/4$. Les ondes ne sont pas suffisamment visibles sur le tube et peuvent être affectées par capillarité. Il est nécessaire de vérifier les résultats précédents par la photographie des plans tangents

horizontaux : à 2 cm. du bord du tube, la première crête passe à 0,07 sec., le creux à 0,19 ; la deuxième crête à 0,26 et un creux de faible hauteur à 0,34. A partir de 0,45 sec., il ne se forme plus d'onde d'amplitude notable à cette distance. La hauteur du point considéré, fonction du temps, ne peut pas être déterminée, mais la méthode des plans tangents indique que les ondes qui peuvent se former après 0,45 sec. sont de très grande longueur et très faible hauteur. Ces faits permettent de conclure que :

1° au temps 0,12 sec., il y a encore environ 15 cm. d'eau dans le tube. Un creux existe déjà au bord du tube : ce n'est donc pas la chute de toute l'eau contenue dans le tube qui produit le soulèvement initial de la surface (première crête du train d'ondes) ;

2° après l'instant 0,45 sec., il ne se forme plus d'onde à 2 cm. du bord du tube ; celui-ci n'est cependant pas encore vide, mais contient 4 cm. d'eau. Donc l'écoulement de cette eau n'a pas pour effet de produire des ondes d'amplitude notable, mais seulement d'élever le niveau du liquide dans le bassin.

On peut d'ailleurs vérifier directement cette conclusion : au bord du tube, la formation du train d'ondes est terminée en 0,20 sec. environ ; j'arrête la chute de l'eau à cet instant ; le train est formé de deux parties : la première due à la chute est sensiblement identique au train dû à la chute totale, la deuxième est formée d'ondes périodiques (Voir Chap. VI).

Cependant, si on soulève 4 cm. d'eau dans le tube, l'écoulement produit des ondes très nettes : à 7 cm. de l'axe de chute, crête, creux, crête ont encore des hauteurs de 0,18, 0,26, 0,07 mm. Et même des hauteurs d'eau inférieures produisent des ondes de hauteur mesurable.

Je rapproche ces observations du mode de chute de l'eau : ce mouvement de chute est d'abord accéléré, puis la vitesse

passé par un maximum, qui peut se maintenir pendant un certain temps, puis la vitesse diminue jusqu'à zéro.

Quand la hauteur de chute est supérieure à 20 cm. d'eau, la photographie des ménisques intérieur et extérieur au tube montre que les grosses ondes sont produites pendant les chutes accélérée et uniforme seulement. La chute ralentie ne produirait que des ondes non décelables par les méthodes d'observation et élèverait seulement le niveau du liquide dans la cuve. Pour des chutes d'eau inférieures à 20 cm., cette conclusion n'est pas valable : des ondes se produisent au début de la chute ralentie.

II. Effet de choc. — La formation d'une crête au voisinage immédiat du tube, un temps très court après le début de la chute, alors que l'écoulement du liquide est encore faible, semblerait pouvoir s'expliquer par un effet de choc de l'air sur l'eau du tube à l'ouverture du robinet : ce choc serait transmis à la partie inférieure du tube avec la vitesse du son dans l'eau. Cet effet de choc expliquerait la formation d'ondes par des chutes d'eau quelconques, même petites. Il est bien évident que le choc ne peut pas être seul à produire les ondes puisque, pour un même tube, leur hauteur dépend de la hauteur d'eau.

Pour préciser l'effet du choc, j'ai utilisé un piston mobile dans un cylindre vertical ouvert en bas ; le piston supporte un disque de verre ou de métal qui touche la surface de l'eau. Il est soulevé de 1 mm. par un ressort. On met en communication le cylindre par un tube de cuivre avec une bouteille de gaz comprimé. A l'ouverture du robinet de la bouteille, le gaz produit un choc sur le piston et un très petit déplacement de 1 mm. Ce déplacement peut même être rendu extrêmement petit : au début, le piston est au bas de sa course, appuyé sur un collier de caoutchouc (après suppression du ressort). Après le choc, la force de pression du gaz comprimé ne peut produire que l'écrasement du

caoutchouc, c'est-à-dire produire un déplacement d'une fraction de millimètre.

Les ondes produites dans ces conditions sont de très petite amplitude : à 12,5 cm. du centre du disque, leur hauteur est de l'ordre de 0,06 mm. alors que par une chute de 20 cm. d'eau, à la même distance, la crête a 0,24 mm. et le creux 0,35 mm.

Cette série d'expériences met bien en évidence le rôle du déplacement : le même choc, suivi d'un déplacement de 1 mm. donne de petites ondes d'amplitudes voisines de 0,14 mm.

Les expériences suivantes sont d'accord avec les précédentes : le tube de verre, vertical, est fermé à sa partie inférieure par une membrane de caoutchouc. La partie supérieure communique, d'une part, avec le robinet automatique, d'autre part, avec un manomètre à liquide. Une dépression dans le tube déplace la membrane vers l'intérieur. L'ouverture du robinet à large voie laisse pénétrer brusquement l'air dans le tube : au choc sur la membrane s'ajoute un très léger déplacement si le caoutchouc est épais et résistant. Dans ce cas, pour une dépression de 20 cm. de mercure, les ondes produites sont de très faible hauteur.

Conclusion : L'effet du choc proprement dit est donc, sinon inexistant, du moins négligeable devant les effets de l'écoulement du liquide.

III. Chute totale et chute partielle. — Ayant soulevé 20 cm. d'eau, on laisse le liquide retomber, mais on ferme le robinet avant écoulement total ; on n'étudie que la première crête du train dû à la chute d'eau, crête qui n'est pas modifiée par les ondes périodiques finales.

Dans la chute totale, la hauteur de cette première crête est 0,36 mm. Dans les chutes partielles, les abaissements du liquide étant 4,7, 10,5, 15 et 18,5 cm., les hauteurs de cette première crête sont 0,21, 0,31, 0,36, 0,36, 0,36 mm.

Dans une autre série d'expériences, la crête a 0,22 mm. quand on laisse écouler l'eau de 28 à 23 cm. Si on laisse tomber le liquide de 5 cm. de hauteur totale, l'amplitude de la première crête est 0,15 mm.

Cet ensemble de résultats permet de dire qu'un train d'ondes produit par chute d'eau, n'est déterminé ni par la hauteur totale d'eau soulevée, ni par le volume d'eau qui s'écoule, mais par une certaine fraction de la hauteur totale. Et l'on peut admettre que, pour les chutes assez élevées, cette fraction est déterminée par la chute accélérée et la chute uniforme dans le tube.

CHAPITRE VI

Ondes progressives périodiques

Pour obtenir des ondes périodiques, je laisse retomber incomplètement l'eau du tube. La chute du liquide produit un premier train d'ondes ; les oscillations de l'eau dans le tube, après l'arrêt de la chute, en donnent un deuxième (fig. 21 et 29, Pl. II).



Fig. 21.

Il est formé d'ondes assez nombreuses, caractérisées par une période relativement bien déterminée, peu variable, à condition de ne pas considérer les premières ondes de ce deuxième train, toujours modifiées par celles du premier.

Si l'on veut obtenir un assez grand nombre de ces ondes régulières, il est nécessaire d'arrêter rapidement la chute de l'eau dans le tube. Ainsi, l'eau étant soulevée de 20 cm. dans le tube de 2 cm. de diamètre, on n'obtient plus d'ondes périodiques si la chute de l'eau dépasse 15 cm. Les ondes régulières sont obtenues en laissant tomber le liquide de quelques centimètres seulement. L'abaissement étant de 1 cm. par exemple, on peut compter 7 creux et crêtes d'amplitude mesurable au voisinage de l'axe de chute.

Les photographies des plans tangents horizontaux permettent la mesure :

1° de la distance de deux crêtes ou de deux creux consécutifs (longueur d'onde) ;

2° de la vitesse moyenne de propagation d'un plan tangent horizontal (creux ou crête) entre deux points ;

3° de l'intervalle des passages de deux crêtes consécutives en un même point (période).

On peut d'abord constater que la période des oscillations de surface est égale à celle des oscillations de la colonne liquide dans le tube. Par exemple :

$$T = 0,157 \text{ et } 0,156 \text{ sec.}$$

$$T = 0,137 \text{ et } 0,136 \text{ sec.}$$

Les ondes superficielles sont donc des oscillations forcées de la surface. Ces ondes périodiques existent au voisinage immédiat du tube : on peut mesurer une longueur d'onde entre 2,3 et 7,7 cm. ($\lambda = 5,4$ cm.) à partir de l'axe. Cette distance est ici de l'ordre de la longueur d'onde. Il serait intéressant de pouvoir étudier par l'expérience, la propagation de ces ondes immédiatement après leur naissance, à des distances de la source — rendue aussi ponctuelle que possible — inférieures à la longueur d'onde.

Production de grandes longueurs d'ondes. — La méthode utilisée permet difficilement d'obtenir de telles ondes. D'après les résultats que j'ai indiqués au chapitre IV, si l'on veut produire des ondes de grande longueur et par suite grande période, il faut choisir un des procédés suivants :

1° conservant un même tube de chute, il faut augmenter la hauteur d'eau, en produisant un même déplacement du liquide dans le tube. On est rapidement limité dans cette voie : l'ouverture du robinet, même pendant un temps extrêmement court est suffisante pour produire, par suite de la grande hauteur initiale de l'eau, un écoulement trop grand du liquide : non seulement la période est plus petite qu'on ne l'aurait prévu, mais la chute d'un grand volume

d'eau donne un premier train qui modifie trop les ondes périodiques qui le suivent.

La figure 22 représente les variations de la longueur d'onde avec la hauteur d'eau qui reste dans le tube, pour un même tube et un même soulèvement initial du liquide (20 cm.). La longueur d'onde est sensiblement fonction

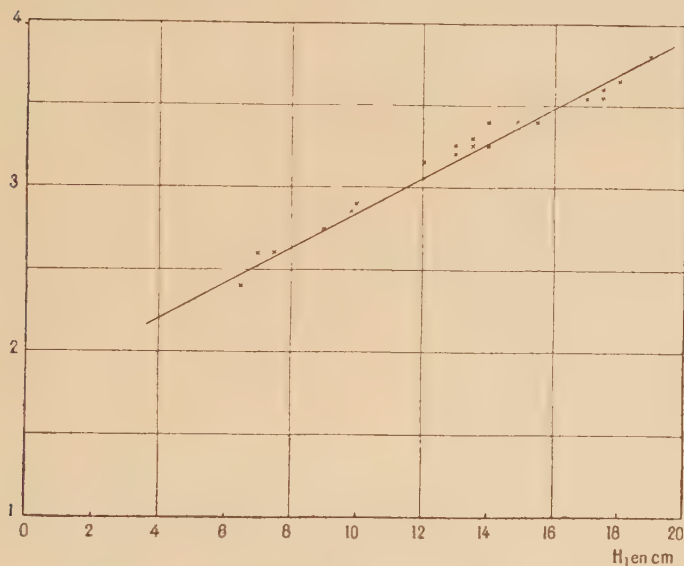


Fig. 22.

linéaire de la hauteur d'eau qui oscille et à 3 o/o près, peut se calculer par $\lambda - 1,75 = \frac{H}{9}$ (λ et H en cm.) ;

2° si l'on diminue la section du tube, on est conduit aux mêmes résultats qu'au paragraphe précédent ;

3° reste la possibilité d'augmenter le volume d'air emprisonné dans le tube au-dessus de l'eau. Si la hauteur d'eau est grande (supérieure à 20 cm. pour le tube utilisé), on retombe encore sur les inconvénients que je viens de signaler. On peut obtenir des ondes assez bien définies avec des hauteurs d'eau de 10 à 15 cm. et un volume d'air de 100 à

150 cm³. Après quelques oscillations qui subissent des perturbations des premières ondes de chute, on obtient un petit nombre d'oscillations périodiques ; elles sont de faible amplitude, mais on peut encore effectuer facilement les différentes mesures avec assez de précision.

D'ailleurs, comme il vaut mieux faire les mesures de longueurs d'onde, période et vitesse sur un même enregistrement que sur plusieurs d'entre eux raccordés, le dispositif employé, comportant une lentille de 10 cm. de diamètre ne m'a permis que l'étude des ondes de longueur d'onde inférieure à 10 cm.

Nature des ondes. — Les oscillations de la surface liquide dans le tube sont sinusoïdales amorties, avec toutefois un léger déplacement d'ensemble vers le haut.

On pourrait espérer obtenir ainsi des ondes sinusoïdales à la surface du bassin si l'on n'était pas obligé de tenir compte du mouvement superficiel produit par la chute initiale de l'eau du tube.

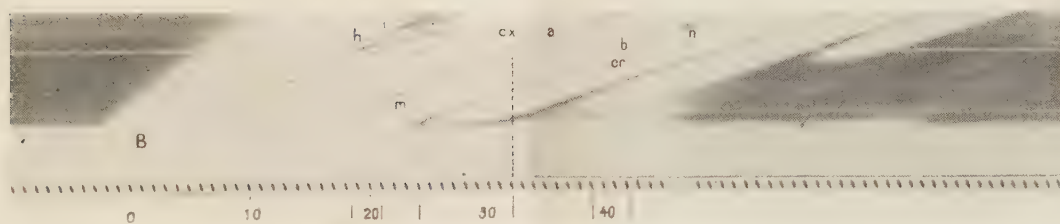
Si l'on détermine par points le profil du train d'ondes périodiques (fig. 23 et 23 bis) (Pl. I), on peut constater, malgré la faible précision de cette détermination, que le profil n'est sinusoïdal qu'approximativement. L'enregistrement des déplacements d'un point en fonction du temps montre que ces déplacements périodiques se superposent à un mouvement d'ensemble, très petit, mais visible, de la surface libre : ce sont des ondes de très petite hauteur et très grande longueur, dues à la chute initiale du liquide et qui suivent le premier train.

L'état de la surface extérieure du tube, autour duquel naissent les ondes superficielles influe peu sur ces ondes, même au voisinage du tube. Trois séries d'expériences ont été faites avec un même tube et dans les mêmes conditions. Dans la première série, la partie inférieure du tube était lavée à l'acide azotique fumant, puis rincée. La deuxième

Fig. 16 bis.



Fig. 17 bis.



475
455
435
415
395
375
355
335
315

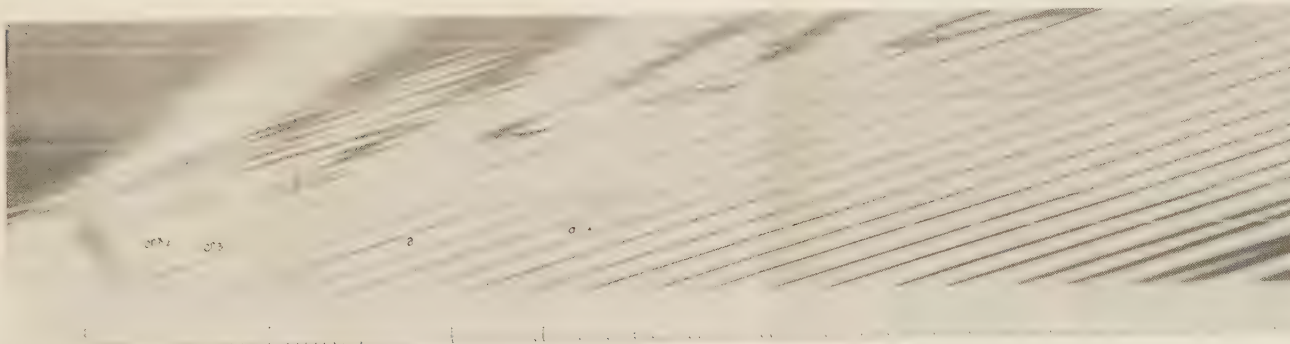


Fig. 23 bis.

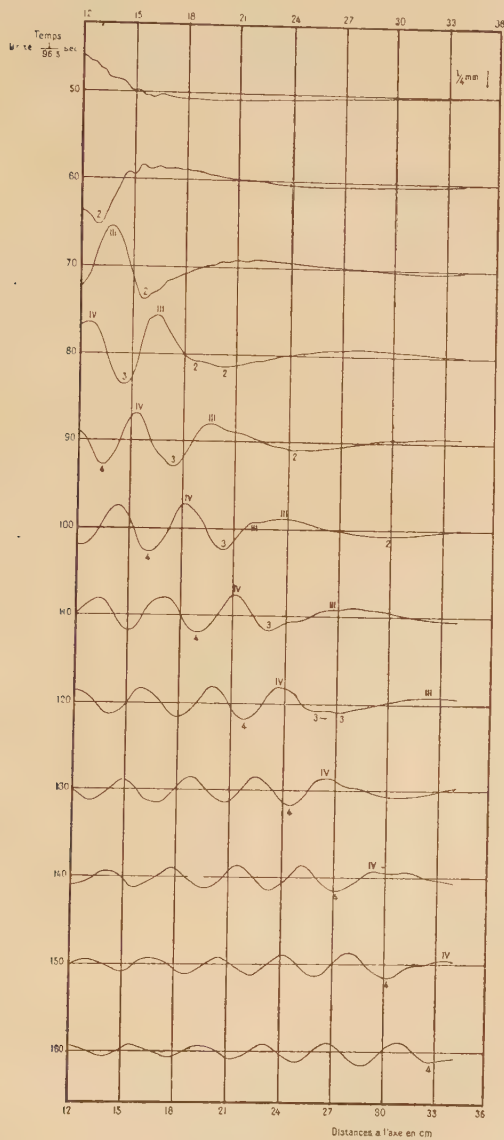


Fig. 23.

série a été faite après avoir plongé le bas du tube dans l'huile de vaseline, et le tube a été paraffiné pour la dernière.

TABLEAU V

Partie inférieure du tube	Caractéristiques d'une même onde					
	λ	V	T	λ	V	V
Lavée à NO^3H	3,68	26,9	13,7	3,60	26,6	13,7
Huillée.	3,60	26,6	13,5	3,68	26,9	13,5
Paraffinée	3,48	26,4	13,3	3,71	26,4	13,8
	3,54	26,6	13,7	3,67	26,8	13,3
	cm.	cm/sec.	1/100 de sec.	cm.	cm/sec.	1/100 de sec.
La vitesse est mesurée entre 6 et 16 cm. du point de chute.						

Le tableau V donne les longueurs d'ondes, périodes et vitesses de propagation entre les mêmes points pour les mêmes crêtes et creux du train. Même pour ces ondes de longueur assez petite, sur lesquelles les phénomènes capillaires influent nettement, l'état du bord du tube influe peu.

Théorie de Lord Kelvin. — L'étude mathématique de la propagation des ondes superficielles *rectilignes*, sinusoïdales, non amorties, a été faite par Kelvin. Il suppose le mouvement irrotationnel, admettant un potentiel des vitesses.

Les conditions à satisfaire sont : 1° le liquide est incompressible ; 2° les vitesses verticales sont nulles sur le fond du récipient.

Ayant choisi un potentiel des vitesses satisfaisant à ces conditions, l'équation du mouvement d'un élément fluide de la surface, en tenant compte de la capillarité, en négligeant la vitesse de l'élément, supposée petite et enfin, en admettant que le liquide n'est pas visqueux, donne les résultats

suivants : la vitesse de propagation et la période de ces ondes sont données par les formules :

$$V^2 = \left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{A}{\rho} \frac{2\pi}{\lambda} \right) \operatorname{tg} h \frac{2\pi h}{\lambda},$$

$$\frac{1}{T^2} = \frac{2\pi}{\lambda^3} \left(\frac{A}{\rho} + g \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \right) \operatorname{tg} h \frac{2\pi h}{\lambda},$$

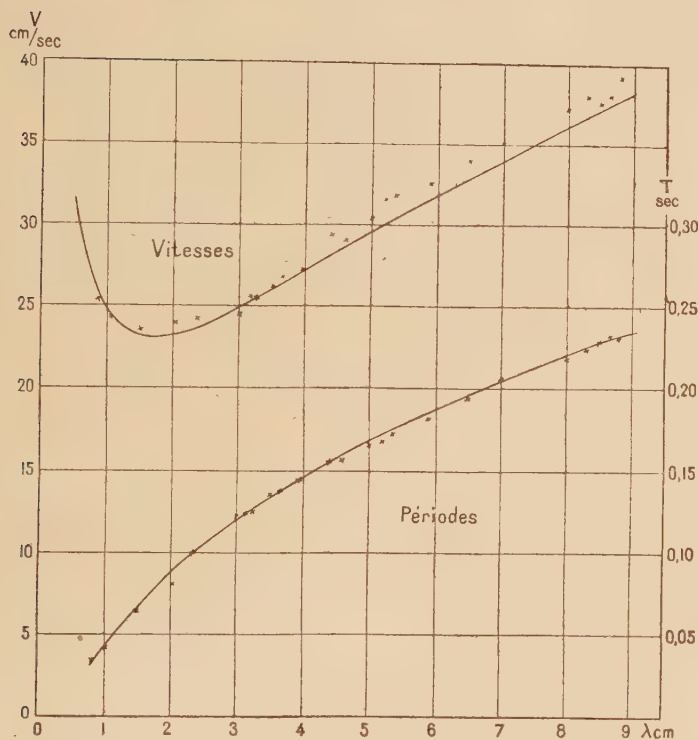


Fig. 24.

λ est la longueur d'onde, ρ la masse spécifique du liquide, A sa tension superficielle et h la profondeur d'eau.

Les expériences ayant été faites dans un bassin de 10 cm. de profondeur et les longueurs d'ondes étant inférieures à 10 cm., $\operatorname{tg} h \frac{2\pi h}{\lambda}$ diffère de l'unité de moins de $1/10^5$ (Il en

différerait encore de moins de $1/200^e$ pour $\lambda = 20$ cm.). Les formules se réduisent ici à :

$$V^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{A}{\rho} \cdot \frac{2\pi}{\lambda},$$

$$\frac{1}{T^2} = \frac{2\pi}{\lambda^3} \left(\frac{A}{\rho} + g \frac{\lambda^3}{4\pi^2} \right).$$

Sur la figure 24, j'ai tracé les courbes de vitesse et période, fonctions de la longueur d'onde, données par les formules précédentes. Pour le calcul, j'ai pris $\rho = 1$ et $A = 73$ dynes/cm. pour l'eau en présence d'air, à 15° , température moyenne des expériences. A cette température, la constante capillaire de l'eau varie de 0,22 o/o par degré; en supposant que les températures extrêmes aient été 10° et 20° , il en résulterait une variation relative de vitesse de l'ordre de $1/350$.

Dans ces conditions, les ondes de longueur $\lambda = 1,7$ cm. se propagent avec la vitesse minimum $V = 23,1$ cm./sec., d'après la théorie de Kelvin.

Résultats expérimentaux. — Les points indiquent les résultats expérimentaux. Pour une comparaison plus détaillée, j'ai porté, dans le tableau VI, les vitesses et périodes mesurées et calculées pour une même longueur d'onde. En première approximation, les résultats expérimentaux, coïncident avec ceux de la théorie de Kelvin. Toutefois les vitesses de propagation mesurées, particulièrement celles des grandes longueurs d'onde, diffèrent des vitesses calculées, la différence étant supérieure aux erreurs de mesure qui ne dépassent pas 2 o/o.

D'autre part, si l'on trace la courbe qui représente le mieux les résultats expérimentaux, on constate qu'elle est au-dessus de la courbe théorique. En supposant que les hypothèses de Kelvin sont satisfaites, on pourrait admettre que, la surface de l'eau n'étant pas toujours parfaitement

propre, la tension superficielle de l'eau est inférieure à 73 dynes/cm. La vitesse calculée serait alors inférieure à celle qui est donnée par la courbe, tandis que la vitesse mesurée lui est supérieure.

TABLEAU VI

λ mes. cm.	V. mes. cm./sec.	V. calc. cm./sec.	T. mes. 1/100 sec.	T. calc. 1/100 sec.	$\lambda = V_m T_m$ cm.	D cm.
0,85	25,4	25,1	3,4	3,4	0,87	13
1,05	24,3	24,5	4,2	4,3	1,03	13
1,5	23,6	23,2	6,4	6,5	1,51	—
2,05	24	23,3	8	8,8	1,92	—
2,35	24,2	23,7	9,6	9,9	2,33	10
3	24,5	25	12,2	12	3	13
3,15	25,6	25,3	12,4	12,4	3,18	—
3,25	25,5	25,4	12,5	12,8	3,12	—
3,50	26,2	26,1	13,5	13,5	3,54	—
3,65	26,9	26,4	13,7	13,8	3,7	9,5
3,95	27,2	27,2	14,5	14,5	3,94	12
4,4	29,4	28,2	15,5	15,6	4,6	7,7
4,6	29	28,6	15,7	16,1	4,56	26,5
5	30,4	29,6	16,6	16,9	5	7,7
5,2	31,6	30	16,8	17,3	5,3	7,7
5,35	31,8	30,4	17,3	17,6	5,5	7,7
5,9	32,6	31,6	18,2	18,7	5,93	9
6,5	34	32,9	19,5	19,7	6,6	11
7	35	34	20,7	20,5	7,25	12,5
8	37,2	36,2	21,9	22,2	8,15	—
8,3	38	36,8	22,5	22,6	8,55	—
8,5	37,5	37,2	23	22,9	8,6	12,5
8,65	38	37,4	23,4	23	8,9	12,5
8,8	39,2	37,8	23,2	23,3	9,15	12,5
Les mesures faites sur les cinq dernières longueurs d'onde sont moins précises que les autres						

On arriverait à un résultat identique en considérant les périodes de ces ondes. Les périodes mesurées sont à très peu près égales aux périodes calculées ; l'accord est meilleur que pour les vitesses. Mais avec une constante capillaire inférieure à 73 dynes/cm., on trouverait une période supérieure ; or les périodes mesurées sont plutôt inférieures aux périodes données par la courbe.

On serait tenté d'en conclure que les formules de Kelvin ne sont pas applicables à ces ondes circulaires.

Une analogie (valable d'ailleurs dans une certaine mesure seulement) laisse penser qu'il ne faut pas s'arrêter à cette conclusion : l'étude mathématique de la propagation du son montre que les ondes éloignées d'une source ponctuelle ont une avance de phase de $\pi/2$ sur les ondes rapprochées de la source ; on explique cette différence en admettant que la vitesse de propagation des ondes sphériques, au voisinage de la source, est plus grande que celle des ondes éloignées. Mais cette vitesse supérieure est localisée à des distances de la source, inférieures à une longueur d'onde.

Il faut toutefois remarquer que l'analogie entre les deux propagations n'est pas complète : les ondes acoustiques se propagent sans dispersion dans l'air, tandis que les ondes superficielles liquides se propagent avec dispersion.

Si l'on admet cette analogie, la courbure des ondes ne devrait se manifester dans la vitesse de propagation qu'à des distances de la source (aussi ponctuelle que possible) de l'ordre de quelques centimètres pour les ondes étudiées ici.

Or, les ondes ne sont pas produites par une source ponctuelle, le rayon du tube étant de 1 ou 2 cm. suivant les expériences, et les vitesses sont mesurées à des distances moyennes de la source de 8 à 10 cm.

Il est sans doute plus exact d'attribuer les petites différences entre la théorie et l'expérience, à la nature de ces ondes qui ne sont pas rigoureusement sinusoïdales et qui sont amorties.

Autre mode de production des ondes. — Pour essayer de vérifier cette hypothèse, j'ai utilisé un autre mode de production des ondes : la surface est mise en mouvement par un système mécanique oscillant. Afin d'obtenir des oscillations d'amplitude variable, pouvant être assez grande, et pour que les déplacements horizontaux de la source soient

les plus petits possible, j'ai utilisé un double fléau articulé, mis en vibration par un ressort à boudin (fig. 25). A la partie inférieure de la tige verticale articulée, on fixe un cylindre ; ceux que j'ai utilisés ont des diamètres de 20, 10, 5 mm. On modifie la période du système et celle des oscillations de la surface en faisant varier la longueur ou la nature du ressort, ou encore en surchargeant le fléau. On

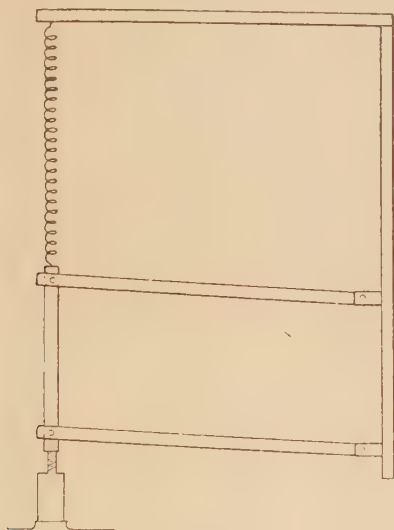


Fig. 25.

descend ainsi facilement à des périodes de 0,2 sec. Les oscillations sont encore amorties mais beaucoup moins que celles d'une colonne d'eau.

Les oscillations de la surface dépendent de l'immersion du cylindre dans le liquide. Quand le cylindre plonge dans le liquide, les ondes superficielles sont toutes altérées par des perturbations identiques à celles que j'ai signalées au chapitre V ; les dernières ondes du train elles-mêmes sont atteintes. Pour obtenir des ondes qui se propagent avec une vitesse sensiblement constante, il faut que le cylindre touche

l'eau dans sa position d'équilibre : encore faut-il laisser de côté les ondes de la tête de train qui montrent des perturbations. En donnant au système oscillant une amplitude assez petite, on peut étudier des trains d'ondes bien définis, quoique les oscillations de la surface soient de faible amplitude.

Si l'on fixe à la partie inférieure de la tige articulée des cylindres de diamètre de plus en plus petits, il est de plus en plus difficile d'obtenir des ondes périodiques non modifiées par les perturbations, à moins que l'on ne veuille obtenir que des oscillations de très faible amplitude.

Les figures 26 (I, II, III) montrent les ondes données par deux cylindres de diamètre 5 et 20 mm. On remarque sur l'enregistrement des plans tangents horizontaux le trait noir ininterrompu qui joint la crête au creux suivant (on peut voir sur la deuxième photographie une amorce de ce trait). Le premier enregistrement est fait immédiatement au bord du cylindre oscillant, le deuxième à quelques millimètres. Dans ces conditions, quand une crête vient de se former au bord du corps oscillant, et s'éloigne, le ménisque capillaire forme un très petit creux sur le cylindre, chose qui ne se produit évidemment pas quand un creux s'éloigne.

Les vitesses de propagation et périodes des ondes superficielles ainsi produites semblent mieux vérifier la théorie de Kelvin que les ondes dues aux oscillations d'une colonne liquide, exemple :

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{mes.}} &= 7,3 \text{ cm.}, & V_{\text{calc.}} &= 34,6 \text{ cm./sec.}, & V_{\text{mes.}} &= 34,8 \text{ cm./sec.} \\ T_{\text{calc.}} &= 0,21 \text{ sec.}, & T_{\text{mes.}} &= 0,21 \text{ sec.}, & \lambda_c &= V_m \times T_m = 7,3 \text{ cm.} \end{aligned}$$

J'espérais trouver par cette méthode, avec des cylindres de petits diamètres, la diminution de vitesse de l'onde quand elle s'éloigne du centre de production. Cette variation de la vitesse, pour une onde sinusoïdale, peut se trouver théoriquement si l'on admet qu'à une certaine distance de la

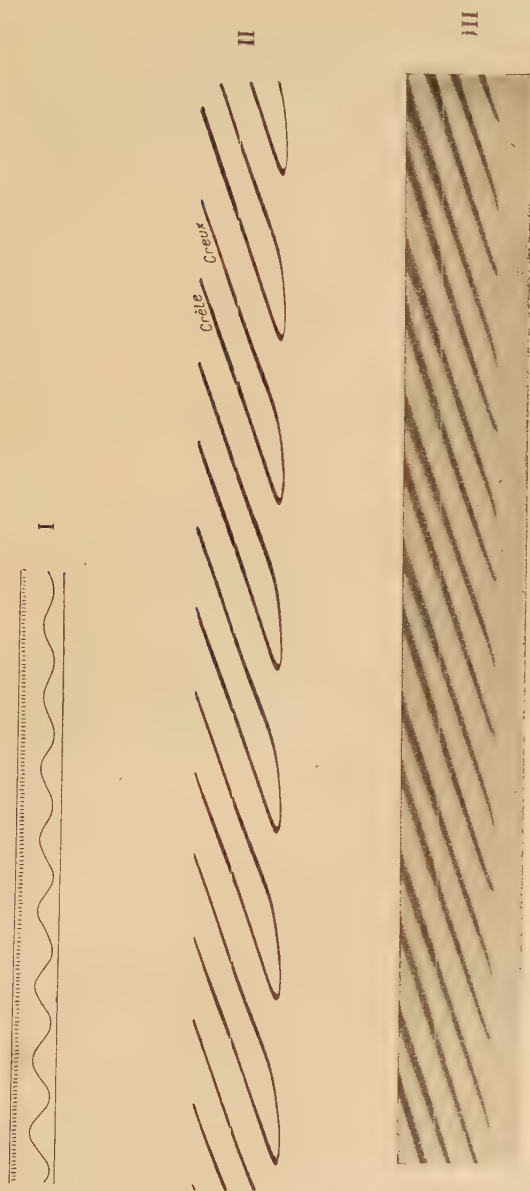


Fig. 26.

source, l'amplitude de cette onde est proportionnelle à $\frac{e^{-\beta r}}{\sqrt{r}}$. r étant la distance à la source, le numérateur indiquant un amortissement par viscosité, le dénominateur étant le terme relatif à un phénomène localisé à la surface : les figures montrent que s'il y a de faibles variations de la vitesse, elles ne sont pas de même sens suivant que l'on considère un creux ou une crête : dans certains cas, quand on s'éloigne du centre, la vitesse des creux diminue, tandis que celle des crêtes augmente, ces variations étant d'ailleurs très faibles.

Vitesses et périodes pendant la propagation. — La mesure des vitesses et périodes d'une même onde, à des distances croissantes du centre de production (ondes produites par oscillations d'une colonne d'eau) ne donne aucun résultat général. On peut seulement remarquer que la longueur d'onde augmente généralement avec la distance, mais de quantités de l'ordre des erreurs de mesure.

TABLEAU VII

D	λ	V	T	λ calc.	λ	V	T	λ calc.	λ	V	T	λ calc.
12	4,1	28	14,6	4,1	4,1	27,7	14,6	4,05				
21,5	4,05	26,6	14,5	3,9	4,1	27,7	14,8	4,1	4	27,3	14,2	3,9
31	4,3	28,3	15,3	4,35	4,15	27,8	14,8	4,12	4,05	27,5	14,5	4
40,5					4,25	28,1	15	4,22	4,15	27,9	14,5	4,05
50					4,3	28,1	15,3	4,3	4,2	28	15,3	4,3

Les unités sont toujours les mêmes.
D est la distance au centre, du milieu du champ photographié.

D	λ	V	T	λ calc.
12	5,5	32,8	17,8	5,85
21,5	5,55	32,1	18,2	5,85
31	5,65	31,8	17,6	5,6
40,5	5,65	31,6	18,1	5,75

Fig. 27.

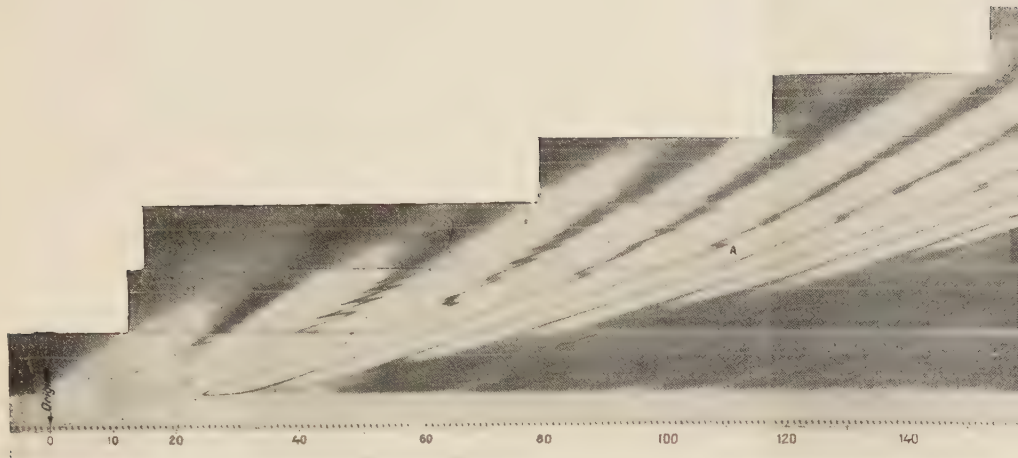
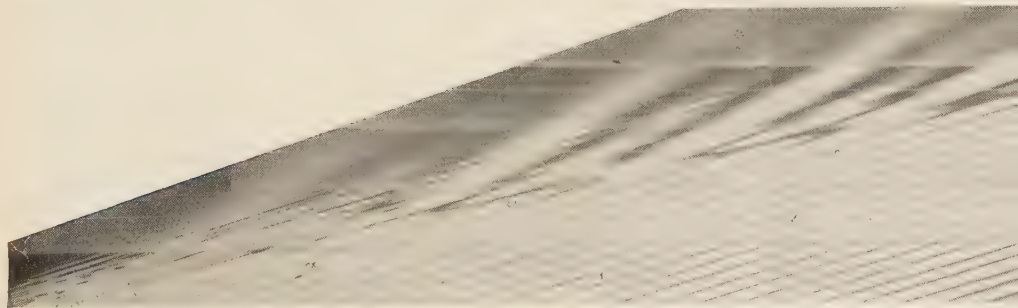
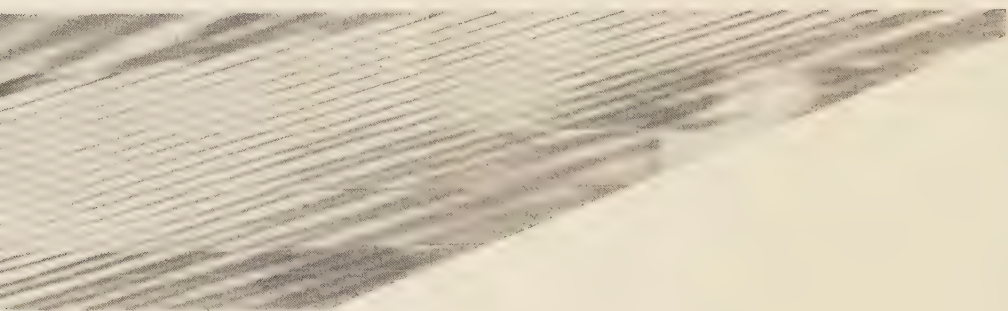
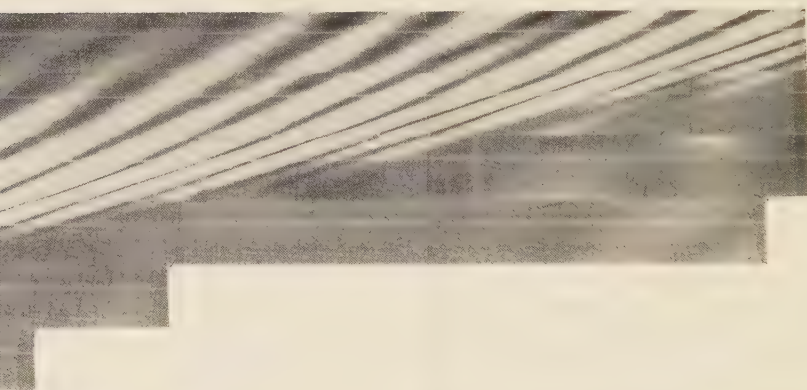


Fig. 28.



Fig. 29.





La première partie du tableau VII donne les résultats relatifs à trois ondes d'un même train suivies depuis le voisinage du tube de chute jusqu'à 50 cm. Les longueurs d'onde et vitesses de propagation de ces ondes ($\lambda = 4,2$ cm.) augmentent (à une exception près) quand on s'éloigne de la source. En même temps, la période augmente aussi ; la variation, pouvant aller jusqu'à 7 o/o est supérieure à l'erreur de mesure.

La deuxième partie du tableau, relative à des ondes de longueur d'onde 5,6 cm. montre que, si la longueur d'onde augmente encore, d'ailleurs très peu, et si la période est également peu variable, la vitesse du creux diminue quand il s'éloigne de la source.

Les variations de vitesse au début de la propagation doivent être attribuées à l'organisation des ondes au voisinage immédiat de leur centre de production.

Si l'on superpose un harmonique de vitesse V' à un fondamental de vitesse V différente, la méthode graphique montre que la vitesse d'un creux ou d'une crête est supérieure ou inférieure à V suivant que V' est également supérieur ou inférieur à V ; peut-être pourrait-on ainsi expliquer les petites variations de la vitesse d'une onde au cours de sa propagation ; mais pour faire une vérification quantitative, même très approchée, il faudrait connaître les rangs et amplitudes des harmoniques superposés, ce qui ne me semble pas possible.

Limite du train d'ondes. — Le profil du train, obtenu par points, d'accord avec la photographie des plans tangents horizontaux, montre un plan tangent d'inflexion, qui, tout en se déplaçant vers l'avant, comme le groupe d'ondes, atteint successivement les creux et les crêtes de l'avant à l'arrière du train. Ce plan semble partager la surface liquide : à l'avant, il n'y a plus d'ondes périodiques, celles-ci n'existant qu'en arrière de ce plan. Il se déplace avec une

vitesse sensiblement constante, non mesurable avec grande précision.

L'arrière du train est mal défini, les ondes ayant des amplitudes trop petites par suite de l'amortissement des oscillations dans le tube.

N'ayant pas d'autres repères, j'ai considéré la vitesse de propagation de ce plan comme la vitesse de propagation du groupe d'ondes. Il serait évidemment préférable de pouvoir étudier un train d'ondes *limité*, la limite avant, en particulier n'étant pas déformée par un phénomène initial quelconque, mais je ne vois pas comment on pourrait produire un tel train d'ondes.

Le train peut donc être considéré comme limité : il est formé, à un instant donné d'ondes sinusoïdales (approximativement) d'amplitude variable, nulle aux deux limites avant et arrière, maximum vers le milieu du train. Le groupe doit donc se propager avec la vitesse de groupe : formule de Lord Rayleigh-Gouy : la vitesse du groupe Φ est donnée en fonction de la vitesse de phase V par :

$$\Phi = V - \lambda \frac{dV}{d\lambda}.$$

Les expériences ne se prêtent malheureusement pas à une vérification précise, parce que chacune des ondes du train n'est pas exactement sinusoïdale, que leur vitesse n'est pas une vitesse de phase, enfin qu'il est difficile de déterminer la vitesse du groupe (prise égale à la vitesse de la limite antérieure), et le terme $\frac{dV}{d\lambda}$.

Voici les résultats de trois séries d'expériences :

I. $\lambda = 3,75 \text{ cm.}$

la courbe représentant les résultats expérimentaux, sensiblement rectiligne dans cette région donne $\frac{dV}{d\lambda} = 2,6$; la vitesse moyenne des creux et crêtes $V = 26,8 \text{ cm./sec.}$; la

vitesse de groupe est $\Phi = 26,8 - 3,75 \times 2,6 = 17$ cm./sec. La vitesse du plan tangent d'inflexion est 16,9 cm./sec. ; la concordance n'est qu'un hasard.

$$\begin{aligned} \text{II. } \lambda &= 3,95 \text{ cm., } V = 28 \text{ cm./sec., } \frac{dV}{d\lambda} = 2,6, \\ \Phi &= 28 - 10,3 = 17,7 \text{ cm./sec.,} \\ \Phi_{\text{mes.}} &= 18 \text{ cm./sec.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{III. } \lambda &= 8 \text{ cm., } V = 37,2 \text{ cm./sec., } \frac{dV}{d\lambda} = 2,25, \\ \Phi &= 37,2 - 18 = 19,2 \text{ cm./sec. ,} \\ \Phi_{\text{mes.}} &= 18,8 \text{ cm./sec.} \end{aligned}$$

La différence des vitesses de groupe calculée et mesurée est de l'ordre des erreurs de mesure.

Les vitesses de groupe calculées en utilisant les valeurs de V et $\frac{dV}{d\lambda}$ données par la formule de Kelvin, sont respectivement 17,8, 17,8 et 19,7 cm./sec. pour les trois valeurs de λ considérées.

CONCLUSION

1° J'ai montré qu'il était possible de déterminer par points le profil d'un train d'ondes liquides superficielles, à un instant donné. La méthode doit être employée avec la photographie des plans tangents horizontaux afin d'éviter toute erreur.

2° La production d'un train d'ondes et surtout sa reproduction ne peuvent se faire que si l'on choisit un mode de production déterminé : j'ai montré, après discussion des résultats expérimentaux, pourquoi j'ai utilisé la méthode de chute d'eau dans un tube.

Elle se prête d'ailleurs bien à la formation d'un train d'ondes périodiques, aussi bien, semble-t-il que d'autres méthodes qui devraient, à *a priori*, donner des phénomènes plus simples.

3° Le train d'ondes, dû à la chute d'eau, comme d'ailleurs un train produit de façon quelconque, est compliqué. Les creux et crêtes sont toujours affectés, pendant leur propagation, par des perturbations qui les déplacent brusquement. Ces perturbations se propagent de l'avant à l'arrière du train, pour les ondes de grande longueur.

4° Afin de pouvoir étudier la formation des ondes, j'ai utilisé une méthode photographique d'inscription du mouvement de l'eau dans le tube. Après avoir montré qu'il ne semblait pas possible de faire une étude mathématique complète de la chute du liquide, telle qu'elle se produit dans ces expériences, j'ai interprété les résultats expérimentaux.

J'ai recherché une formule donnant la période des oscillations, seulement à titre d'indication, pour savoir comment faire varier cette période et de quelle quantité.

5° J'ai essayé de savoir comment se produisaient les ondes superficielles et j'ai montré que l'effet de l'arrivée brusque de l'air était négligeable, que les ondes étaient produites par l'écoulement d'un volume d'eau, fraction du volume soulevé.

6° Enfin les ondes progressives périodiques, étudiées aussi près que possible de leur centre de production, vérifient les formules de Kelvin en première approximation. Les petites différences entre les résultats théoriques et expérimentaux doivent être attribuées, non à la courbure des ondes, mais plutôt à leur nature.

Ces recherches ont été poursuivies et terminées au Laboratoire de Physique de l'École Normale Supérieure. Je suis heureux d'exprimer toute ma reconnaissance à M. H. Abraham pour la bienveillance avec laquelle il a mis à ma disposition les ressources du laboratoire et pour les précieux conseils et encouragements qu'il m'a donnés.

Ce travail a été commencé à la Faculté des Sciences de Toulouse. A M. H. Bouasse, qui m'en a donné l'idée et en a suivi les débuts, j'adresse tous mes remerciements, ainsi qu'à MM. M. Brillouin et H. Bénard qui ont bien voulu s'intéresser à ces recherches.

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Obtention de carburants à partir de la houille.

VU ET APPROUVÉ :

Paris, le 11 Mai 1932.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

CH. MAURAIN.

VU ET PERMIS D'IMPRIMER :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

S. CHARLÉTY.

